Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 2

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

15 settembre 2010

Esercizio 1

(7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{|3x-1|} - \sqrt{2x}.$$

(a) Determinare il dominio di f,

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f,

(c) calcolare f' e studiare la monotonia di f,

(d) calcolare i limiti di f' agli estremi del dominio,

(e) dalle informazioni precedenti disegnare un abbozzo del grafico.

Soluzione. La funzione è definita e continua in $D = [0, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x-1} - \sqrt{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x}} = +\infty.$$

Prima di calcolare la derivata I conviene riscrivere la funzione come

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x-1} - \sqrt{2x}, & x \geq \frac{1}{3} \\ \sqrt{1-3x} - \sqrt{2x}, & 0 \leq x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

da cui

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}, & x > \frac{1}{3} \\ \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}, & 0 < x < \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Osserviamo che $f'(x)$ ristretta all'intervallo $(0, 1/3)$ è sempre strettamente negativa. Quindi, per $x \in (1/3, +\infty)$, studiamo il segno della derivata I

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

da cui

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3\sqrt{2x} > 2\sqrt{3x-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 18x > 12x - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -\frac{2}{3}$$

e, essendo $-2/3 < 1/3$, $f'(x) < 0$ in $(1/3, +\infty)$. Possiamo concludere che:

a) $f(x)$ ristretta all'intervallo $(0, 1/3)$ è monotona strettamente decrescente;

b) $f(x)$ ristretta all'intervallo $(1/3, +\infty)$ è monotona strettamente crescente.

Calcoliamo quindi i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to \frac{1}{3}^+} f'(x) = +\infty$$

da cui possiamo concludere in particolare che il punto $(1/3, -\sqrt{2/3})$ è una cuspide.

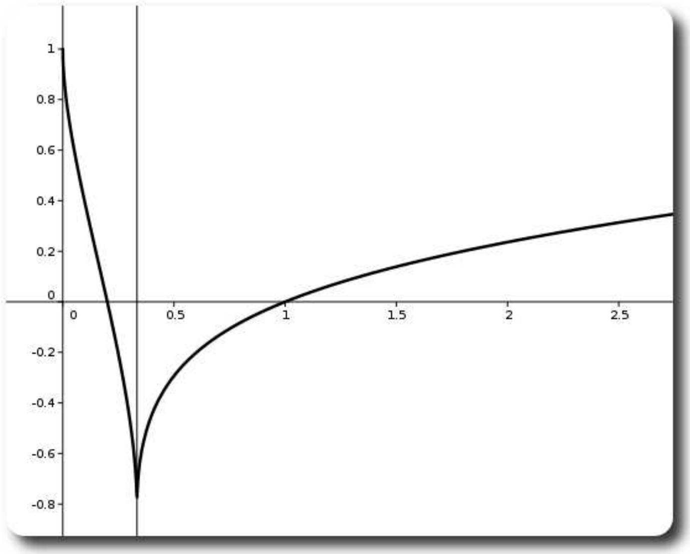

Figura 1. Grafico di f

Esercizio 2

(6 punti) Studiare i punti di flesso, la concavità e convessità della funzione

$$f(x)=|x|^3 e^{-(x+1)}.$$

Soluzione. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e si può riscrivere nella forma

$$f(x)=\begin{cases} x^3\, e^{-(x+1)}, & x\geq 0\\ -x^3\, e^{-(x+1)}, & x<0.\end{cases}$$

La derivata prima è

$$f'(x)=\begin{cases} x^2\,(3-x)\,e^{-(x+1)}, & x>0\\ -x^2\,(3-x)\,e^{-(x+1)}, & x<0.\end{cases}$$

la derivata seconda è

$$f''(x)=\begin{cases} x(x^2-6x+6)\,e^{-(x+1)}, & x>0\\ -x(x^2-6x+6)e^{-(x+1)}, & x<0.\end{cases}$$

Prima di procedere allo studio del segno della derivata II osserviamo che

$$x^2-6x-6\geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\leq 3-\sqrt{3} \quad \vee \quad x\geq 3+\sqrt{3}.$$

Suddividiamo lo studio della derivata II in due parti.

A) Per valori di x che cadono nell'intervallo $(-\infty,0)$ si ha sempre $f''(x)>0$. Quindi $f(x)$ è strettamente convessa in $(-\infty,0)$;

B) Per valori di x che cadono nell'intervallo $(0,+\infty)$ si ha:

   i. $f''(x)>0$ se $x\in(0,3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3},+\infty)$. Quindi $f(x)$ è convessa in ciascuno dei due intervalli dell'unione;

   ii. $f''(x)<0$ nell'intervallo $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$. Quindi $f(x)$ è concava in tale intervallo.

I punti di flesso di f sono $x_1=3-\sqrt{3}$ e $x_2=3+\sqrt{3}$. Per concludere l'esercizio vediamo cosa si può dire del punto $x=0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f''(x)=\lim_{x\to 0^-} f''(x)=0.$$

Per quanto visto in precedenza, in opportuni intorni destri e sinistri di $x=0$, la funzione è sempre convessa e quindi $x=0$ non è un punto di flesso. Non sarebbe difficile vedere che $x=0$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 3

(6 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cosh(x)-1)^{1/2}}{e^x - \log(1+x) + x^2 + 5x - 1}.$$

Soluzione. Nel limite $x\to 0^+$ si ha

$$\cosh(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad \log(1+x) = x + o(x) \qquad e^x - 1 = x + o(x).$$

Per quanto riguarda il numeratore osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\cosh(x) - 1}{x^2}\right)^{1/2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cosh(x)-1)^{1/2}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui possiamo concludere che, nel limite di $x\to 0^+$, si ha

$$(\cosh(x)-1)^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x + o(x).$$

Sostituendo gli sviluppi per il denominatore si ha direttamente

$$e^x - \log(1+x) + x^2 + 5x - 1 = 5x + o(x).$$

Il limite di partenza diviene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x + o(x)}{5x + o(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + o(1)}{5 + o(1)} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Esercizio 4

(7 punti) Studiare la convergenza assoluta e la convergenza, al variare del parametro $\alpha > 0$, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \frac{3}{n^\alpha}\right).$$

Soluzione. La serie si presenta nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \tag{1}$$

con

$$a_n = \log\left(1 + \frac{3}{n^\alpha}\right).$$

Osserviamo subito che $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$ e per ogni $\alpha > 0$. Quindi la serie è a termini di segno alterno. Iniziamo studiando la convergenza assoluta ossia la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Nel limite per $n\to+\infty$ e per $\alpha > 0$ si ha

$$a_n = \log\left(1 + \frac{3}{n^\alpha}\right) = \frac{3}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{3}{n^\alpha}.$$

Ricordato che la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge per $\alpha > 1$, per il Criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che la serie (1) converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, per $\alpha > 1$.

Resta da discutere la convergenza semplice nel caso $0 < \alpha \leq 1$.

Per quanto osservato all'inizio possiamo ricorrere al Criterio di Leibniz:

1. la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi;
2. la successione $\{a_n\}$ è infinitesima. Infatti si ha
$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{3}{n^\alpha}\right) = 0$$
per ogni $\alpha > 0$;
3. la successione $\{a_n\}$ è monotona strettamente decrescente in quanto
$$\log\left(1+\frac{3}{(n+1)^\alpha}\right) < \log\left(1+\frac{3}{n^\alpha}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha > 1$$
per ogni $n \geq 1$ e se $\alpha > 0$.

Quindi per il Criterio di Leibniz la serie converge semplicemente se $\alpha \in (0,1]$.

Esercizio 5

(6 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\, dx.$$

(2 punti) Facoltativo: dalle informazioni ottenute al punto precedente, calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\, dx.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\int \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\, dx = \int \frac{e^x}{1+3e^{2x}}\, dx$$

e quindi utilizziamo il Teorema di integrazione per sostituzione con

$$y = \sqrt{3}\, e^x \quad dy = \sqrt{3}\, e^x\, dx$$

ottenendo

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan y$$

da cui

$$\int \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\, dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \sqrt{3}\, e^x.$$

A questo punto possiamo concludere l'esercizio in quanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{-x}+3e^x}\, dx = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \sqrt{3}\, e^x\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \sqrt{3}\, e^0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$$