Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

20 luglio 2010

Esercizio 1

(7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x)=x^{\sin 3x}$$

(a) Determinare il dominio di f e il segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità ed eventuali estendibilità per continuità.

(d) Studiare la derivabilità di f; calcolare f'.

(e) Calcolare il limite di $f'(x)$ agli estremi del dominio.

Soluzione. Per risolvere l'esercizio conviene riscrivere la funzione nella forma

$$f(x)=e^{\sin 3x\log x}$$

da cui si vede subito che il dominio è $D=(0,+\infty)$ e che la funzione è definita strettamente positiva in D. Osserviamo che la funzione non ammette limite per $x\to+\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to0^+}\sin 3x\log x=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 3x}{3x}3x\log x=0$$

in quanto

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin 3x}{3x}=1\qquad\lim_{x\to0^+}3x\log x=0.$$

Possiamo allora concludere che

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=e^0=1.$$

La funzione non ammette asintoti verticali, orizzontali e obliqui. La funzione è continua nel suo dominio e può essere estesa per continuità su $[0,+\infty)$ ponendo $f(0)=1$.

La derivata I di $f(x)$ è

$$f'(x)=e^{\sin 3x\log x}\left(3\cos 3x\log x+\frac{\sin 3x}{x}\right)$$

da cui concludiamo che la funzione è derivabile in D. Per concludere l'esercizio osserviamo che

$$\lim_{x\to0^+}\left(3\cos 3x\log x+\frac{\sin 3x}{x}\right)=3\lim_{x\to0^+}\cos 3x\log x+3=-\infty$$

e, ricordato che

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=1$$

si ha

$$\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)\left(3\cos 3x\log x+\frac{\sin 3x}{x}\right)=-\infty.$$

Esercizio 2

(6 punti) Si consideri la funzione

$$f(x)=\arctan\left(\frac{x-1}{\alpha x}\right)$$

e si determinino i valori di $\alpha > 0$ in modo che essa abbia un punto di flesso in $x = 1/2$. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di flesso.

Soluzione. La derivata I di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{\alpha x}\right)^2} \cdot \frac{\alpha x - \alpha(x-1)}{\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 x^2 + (x-1)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 x^2 + x^2 - 2x + 1}$$

ed è definita per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. La derivata II di $f(x)$ è

$$f''(x) = -\frac{2\alpha(\alpha^2 x + x - 1)}{(\alpha^2 x^2 + x^2 - 2x + 1)^2}$$

e si annulla in $x = 1/2$ quando

$$\alpha^2 - 1 = 0.$$

ossia, ricordato che $\alpha > 0$, solo per $\alpha = 1$. In corrispondenza di tale valore si ha

$$f''(x) = -\frac{4x - 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

e

$$-\frac{4x - 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < \frac{1}{2}.$$

Possiamo allora concludere che esiste un intorno sinistro di $x = 1/2$ in cui si ha $f''(x) > 0$ e un intorno destro di $x = 1/2$ in cui $f''(x) < 0$ e ciò conferma che $x = 1/2$ è un punto di flesso.

Esercizio 3

(7 punti) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n} - 1 - \log(1 + \sin(1/n))}{\arctan n}$$

Soluzione. Nel limite di $n \to +\infty$ si ha

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui, sostituendo, possiamo concludere che

$$e^{1/n} - 1 - \log\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il numeratore è asintotico a $1/n^2$ e quindi è definitivamente positivo per $n \to +\infty$. In altri termini, per n "grande", la serie è a termini positivi. Posto

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1 - \log(1 + \sin(1/n))}{\arctan n}$$

e ricordato che

$$\lim_{n \to +\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$$

si ha

$$a_n \sim \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}$$

da cui, sapendo che la serie armonica generalizzata di termine generico $1/n^2$ converge, per il Criterio del confronto asintotico si ha che la serie di partenza converge.

Esercizio 4

(7 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^2 \sin(\log x)\,d\,x.$$

Soluzione. Utilizziamo la sostituzione

$$y = \log x \qquad d\,y = \frac{1}{x}\,d\,x \qquad y_1 = 0 \qquad y_2 = \log 2$$

da cui

$$\int_1^2 \sin(\log x)\,d\,x = \int_0^{\log 2} e^y \sin y\,d\,y.$$

Integrando per parti

$$\int_0^{\log 2} e^y \sin y\,d\,y = [e^y \sin y]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^y \cos y\,d\,y = 2\sin(\log 2) - \int_0^{\log 2} e^y \cos y\,d\,y$$

e quindi

$$\int_0^{\log 2} e^y \sin y\,d\,y = 2\sin(\log 2) - [e^y \cos y]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^y \sin y\,d\,y$$

da cui

$$\int_0^{\log 2} e^y \sin y\,d\,y = \sin(\log 2) - \frac{1}{2}\,(2\cos(\log 2) - 1) = \sin(\log 2) - \cos(\log 2) + \frac{1}{2}.$$

Esercizio 5

(5 punti) Si consideri la funzione in due variabili

$$f(x,y) = y^2 + 2y + x^2 + 7 - 2\log x.$$

Determinare i punti critici di f e specificarne il tipo.

Soluzione. La funzione è definita in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

Per determinare i punti critici calcoliamo innanzitutto il gradiente della funzione

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x - \frac{2}{x}, 2y + 2\right)$$

quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{2}{x} = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

L'unico punto critico in D è $P = (1, -1)$. La matrice hessiana risulta

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{x^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$H(1,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

il determinante della matrice hessiana è $8 > 0$ e osservato che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 4 > 0$$

possiamo concludere che il punto critico è un minimo locale.