Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

8 febbraio 2010

Esercizio 1

(7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{\left(2x+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. I limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Soluzione. La funzione è definita positiva in $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Possiamo concludere che la funzione presenta un asintoto orizzontale destro e un asintoto orizzontale sinistro rispettivamente di equazione $y = \pi/2$ e $y = 0$.

La funzione è limitata in D e quindi non ammette altri asintoti.

La funzione è derivabile in D e

$$f'(x) = \frac{e^{2x+\frac{1}{x}}}{1+\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)^2}\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$$

Lo studio del segno della derivata prima si riduce a

$$f'(x)\geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2-1\geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad x\geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Possiamo concludere che

- f è monotona strettamente crescente se ristretta agli intervalli $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ e $(\sqrt{2}/2, +\infty)$;
- f è monotona strettamente decrescente se ristretta agli intervalli $(-\sqrt{2}/2, 0)$ e $(0, \sqrt{2}/2)$;

- il punto $x_M = -\sqrt{2}/2$ è punto di massimo relativo (non assoluto);
- il punto $x_m = \sqrt{2}/2$ è punto di minimo relativo (non assoluto).

I valori massimo e minimo assunti dalla funzione sono rispettivamente:

$$f(x_M) = \arctan\left(e^{-2\sqrt{2}}\right) \qquad f(x_m) = \arctan\left(e^{2\sqrt{2}}\right).$$

Calcoliamo i limiti significativi della derivata prima.

Nel limite $x \to 0^+$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} e^{2x+\frac{1}{x}} = +\infty$$

e si vede che

$$\frac{\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)}{1+\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)^2} \sim \frac{1}{e^{2x+\frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

allora

$$f'(x) = \frac{\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)}{1+\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)^2} \cdot \frac{2x^2-1}{x^2} \sim -\frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}$$

da cui si conclude che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0.$$

Analogamente si vede che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$$

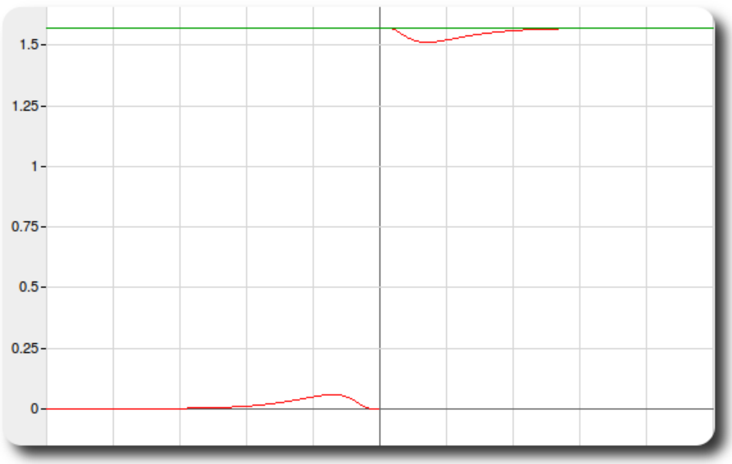

Figura 1. Grafico di f

Esercizio 2

(6 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin(2x^2)\, dx.$$

Soluzione. Iniziamo calcolando una primitiva della funzione integranda. Con la sostituzione

$$y = x^2 \quad dy = 2x\,dx$$

si ha

$$\int x^3 \sin(2x^2)\,d\,x = \frac{1}{2}\int y \sin(2y) dy$$

Integrando per parti si ha

$$\frac{1}{2}\int y \sin(2\,y)\,dy = -\frac{y}{4}\cos(2\,y) + \frac{1}{4}\int \cos(2\,y)\,dy = -\frac{y}{4}\cos(2\,y) + \frac{1}{8}\sin(2\,y)$$

da cui

$$\int_0^\pi x^3 \sin(2x^2)\,d\,x = \left[-\frac{x^2}{4}\cos(2x^2) + \frac{1}{8}\sin(2x^2)\right]_0^\pi = -\frac{\pi^2}{4}\cos(2\pi^2) + \frac{1}{8}\sin(2\pi^2).$$

Esercizio 3

(7 punti)

(a) Trovare l'ordine di infinitesimo di $a_n = \arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - e^{\frac{1}{n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^\alpha}$ al variare del parametro reale $\alpha > 0$.

(b) Determinare per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Soluzione. Nel limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^4\right)$$

da cui, sviluppando i calcoli, anche

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Inoltre

$$e^{1/n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

da cui, sviluppando i calcoli, anche

$$e^{1/n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

In conclusione allora

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - e^{1/n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

e quindi

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Possiamo distinguere i seguenti casi

1. per $\alpha \geq 3$ si ha che a_n è infinitesimo di ordine 3 rispetto a $1/n$;

2. $0 < \alpha < 3$: a_n è infinitesimo di ordine α rispetto a $1/n$.

Per il Criterio del confronto asintotico e tenuto conto di quanto noto sulla convergenza della serie armonica generalizzata, possiamo concludere che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

risulta convergente per $\alpha > 1$ e divergente per $0 < \alpha \leq 1$.

Esercizio 4

(6 punti) Trovare, se esistono, gli asintoti obliqui, per $x \to \pm\infty$, della funzione

$$f(x) = x^3 \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \arctan 3x.$$

Soluzione. Per $x \to \pm\infty$, si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

da cui osserviamo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \left(1 + o(1) + \frac{\arctan(3x)}{x}\right) = \pm\infty.$$

Ora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + o(1) + \frac{\arctan(3x)}{x}\right) = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} o(x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{2}.$$

La funzione ha come asintoto obliquo destro la retta di equazione $y = x + \pi/2$. La funzione è dispari, in quanto $f(-x) = -f(x)$, quindi

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} o(x) + \arctan(3x) = -\frac{\pi}{2}.$$

In conclusione l'asintoto obliquo sinistro è la retta di equazione $y = x - \pi/2$.

Esercizio 5

(6 punti) Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x, y) = e^{xy + 2x}.$$

(a) Calcolare le derivate parziali $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

(b) Trovare gli eventuali punti critici di f, calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinarne la natura.

Soluzione. Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+2)\,e^{xy+2x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\,e^{xy+2x}.$$

L'unico punto critico di f è $P = (0, -2)$. La matrice Hessiana in tale punto risulta

$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, osservato che $\det D^2 f(P) = -1 < 0$, possiamo concludere che P è un punto di sella.