Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

26 gennaio 2010

Esercizio 1 (7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\big(\sqrt{x}\big) - \log(1+x)$$

(a) Determinare il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f, i limiti di f' se significativi.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

(**Facoltativo**) Tenuto conto anche delle informazioni ricavate dai punti precedenti, dire se esistono e quanti sono gli zeri della funzione $g(x) = f(x) - 27x$.

Soluzione. Il dominio di f è $D = [0, +\infty)$, $f(0) = 0$, e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

ed è definita in $(0, +\infty)$. Lo studio del segno della derivata prima si riduce allo studio della disequazione

$$1 - 2\sqrt{x} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

da cui concludiamo che la funzione è monotona strettamente crescente in $(0,\ 1/4)$ e monotona strettamente decrescente in $(1/4, +\infty)$. Il punto $x = 1/4$ è di massimo relativo e assoluto

$$f(1/4) = \arctan(1/2) - \log 5 + \log 4$$

L'unico limite significativo della derivata prima è

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty.$$

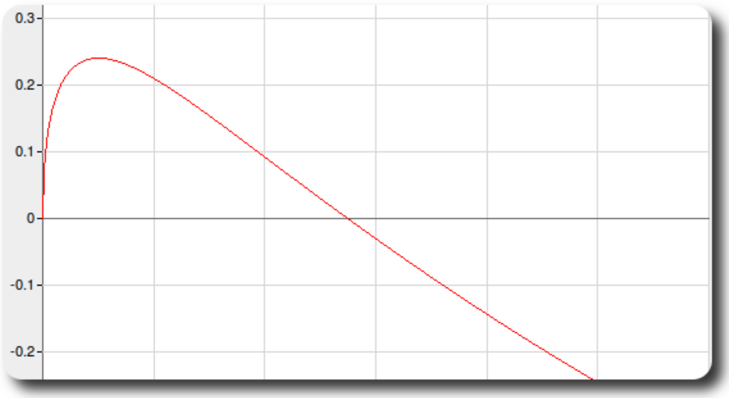

Figura 1. Grafico di f

(**Facoltativo**) La funzione $g(x)$ è definita continua in D e ha uno zero in $x=0$. Per vedere se ci sono altri zeri in D osserviamo che

$$g(x)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)=r(x) \tag{1}$$

dove $r(x)=27x$. Per quanto visto sopra la funzione $f(x)$ è limitata superiormente e

$$\max_{(0,+\infty)} f = f(1/4) < \frac{\pi}{4} + 2 < r(1/4) = \frac{27}{4}. \tag{2}$$

Da (2) e dal fatto che $r(x)$ è monotona strettamente crescente possiamo concludere che

$$g(x) < 0$$

per ogni $x \in [1/4, +\infty)$ e quindi che, se esistono altri zeri di g oltre $x=0$, questi devono cadere nell'intervallo $(0, 1/4)$. Per $x \to 0^+$

$$g(x) \sim \sqrt{x} - 28x > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < x < \frac{1}{28^2}$$

e quindi $g(x)$ è definitivamente positiva per $x \to 0^+$. Per il Teorema degli zeri esiste allora almeno un valore di $\alpha \in (0, 1/4)$ tale che $g(\alpha)=0$ e quindi g ammette almeno due zeri. Si può dimostrare che α è unico osservando che la derivata prima

$$g'(x) = f'(x) - 27 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{1+x} - 27$$

è continua e monotona strettamente decrescente in $(0, 1/4]$ con

$$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = +\infty \qquad g'(1/4) = -27.$$

Dal Teorema degli zeri, tenuto conto anche della monotonia di g', possiamo concludere che esiste unico $\beta \in (0,\ 1/4)$ tale che $g'(\beta)=0$. Quindi $g(x)$ è monotona strettamente crescente in $[0,\ \beta)$ e strettamente decrescente in $(\beta,\ 1/4]$. Il punto $x=\beta$ è di massimo assoluto e $g(\beta) > 0$. Quindi $\alpha \in (\beta, 1/4)$ è l'unico zero di g oltre a $x=0$.

Esercizio 2 (7 punti) Calcolare il seguente limite al variare del parametro reale $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x - \arcsin x)^2 - \log(1 + \sin^2 x)}{x^\alpha + x \log(1+x)}.$$

Soluzione. Il limite si presenta come forma indeterminata del tipo [0/0]. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\arcsin x = x + o(x^2) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \sin(x) = x + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-\arcsin x)^2 - \log(1+\sin^2 x)}{x^\alpha + x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)}.$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $0 < \alpha < 2$ allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = 0$$
2. $\alpha = 2$ allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}$$
3. $\alpha > 2$ allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -1.$$

Esercizio 3 (6 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx.$$

(**Facoltativo**) Discutere la convergenza di $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx$.

Soluzione. Si ha direttamente

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx = \left[-2\sqrt{1-\tan x}\,\right]_0^{\pi/6} = 2 - 2\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

(**Facoltativo**) Il modo più semplice di studiare la convergenza è

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}^-} \int_0^{y} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx = 2 + \lim_{y\to\frac{\pi}{4}^-} -2\sqrt{1-\tan y} = 2$$

da cui si vede che l'integrale converge.

Nota 1. L'integrale di partenza di può risolvere con la sostituzione $y = 1 - \tan x$.

Esercizio 4 (7 punti) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\log n + 2n^{\log n} + \sin n}{3^n}\right)^n$$

Soluzione. La serie è a termini positivi. Per discutere la convergenza ricorriamo al Criterio della radice e calcoliamo il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n + 2n^{\log n} + \sin n}{3^n} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\log^2 n}}{e^{n\log 3}} \cdot \left(1 + \frac{\log n}{2n^{\log n}} + \frac{\sin n}{2n^{\log n}}\right) \tag{3}$$

ora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\log^2 n}}{e^{n\log 3}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\log^2 n-n\log 3}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left(\frac{\log^2 n}{n}-\log 3\right)}=0$$

dove si è utilizzato

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{\log^2 n}{n}-\log 3\right)=-\infty.$$

Allora il limite (3) vale $0<1$ e quindi per il Criterio della radice la serie converge.

Esercizio 5 (5 punti) Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha\in\mathbb{R}$, la funzione

$$f(x)=(3x^2-1)e^{\alpha x+2}$$

ha derivata seconda nulla in $x=0$. Determinare inoltre l'equazione della retta tangente in tale punto.

(**Facoltativo**) Per tali valori del parametro α, determinare gli intervalli di convessità di f.

Soluzione. La funzione è derivabile e

$$f'(x)=(3\alpha x^2+6x-\alpha)\,e^{\alpha x+2}$$

inoltre

$$f''(0)=e^2(6-\alpha^2).$$

I valori di α che annullano la derivata seconda sono $\alpha=\pm\sqrt{6}$. L'equazione delle tangenti corrispondenti a tali valori sono

$$y=-\sqrt{6}\,e^2x-e^2\qquad y=\sqrt{6}\,e^2x-e^2.$$

(**Facoltativo**) Nel caso $\alpha=\sqrt{6}$ si ha

$$f(x)=(3x^2-1)e^{\sqrt{6}x+2}$$

che è definita su tutto $\mathbb{R}$. La derivata prima di f è

$$f'(x)=(6x+(3x^2-1)\sqrt{6})\,e^{\sqrt{6}x+2}$$

e la derivata seconda di f è

$$f''(x)=6x\,(3x+2\sqrt{6})\,e^{\sqrt{6}x+2}.$$

Lo studio del segno della derivata seconda si riduce alla disequazione

$$x\,(3x+2\sqrt{6})>0\quad\Leftrightarrow\quad x<-\frac{2}{3}\sqrt{6}\quad\vee\quad x>0$$

da cui

$$\begin{array}{lll} f''(x)>0 & x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\sqrt{6}\right) & f\text{ strettamente convessa}\\ f''(x)<0 & x\in\left(-\frac{2}{3}\sqrt{6},0\right) & f\text{ strettamente concava}\\ f''(x)>0 & x\in(0,+\infty) & f\text{ strettamente convessa}\end{array}$$

e i punti $x=0$ e $x=-2\sqrt{6}/3$ sono punti di flesso. Il caso $\alpha=-\sqrt{6}$ è del tutto analogo.