ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 24 Febbraio 2012

Soluzioni del tema 1

Esercizio 1

(a) dom$(f) = \mathbb{R}$; infatti arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $e^{2x} + 1 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione non presenta simmetrie né evidenti periodicità.

Segno: $f(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti $f > 0$ equivale a $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} > 0$ e quest'ultima è sempre verificata.

(b) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan 1 = \pi/4, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan 0 = 0$$

perché arctan è continua e perché $(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}) \to 1$ e $\to 0$ rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Ne deduciamo che le rette $y = \pi/4$ e $y = 0$ sono rispettivamente l'asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

(c) La funzione è continua sul suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni continue. La funzione è anche derivabile nei punti del suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni derivabili.

Risulta poi

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)^2} \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - e^{2x}(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}}{2e^{4x} + 2e^{2x} + 1}.$$

Ne segue che $f' > 0$ su $\mathbb{R}$. Quindi la funzione f è sempre strettamente crescente e non presenta punti di massimo o minimo nè relativi nè assoluti.

(Si osservi che a questa conclusione si può giungere osservando che $f(x) \equiv \arctan(1 - \frac{1}{e^{2x}+1})$ è la composizione di funzioni strettamente crescenti).

Non richiesto: per il teorema di monotonia si evince facilmente che $\inf(f) = 0$, $\sup(f) = \pi/4$.

(d) Risulta

$$f''(x) = \frac{4e^{2x}(2e^{4x} + 2e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(8e^{4x} + 4e^{2x})}{[2e^{4x} + 2e^{2x} + 1]^2} = \frac{4e^{2x}}{[2e^{4x} + 2e^{2x} + 1]^2} \left(-2e^{4x} + 1\right).$$

Ne segue che lo studio di $f'' > 0$ equivale a quello di $-2e^{4x} + 1 > 0$. Quindi abbiamo $f'' > 0$ per $x < -\frac{\ln 2}{4}$, $f'' < 0$ per $x > -\frac{\ln 2}{4}$ e $f''(-\frac{\ln 2}{4}) = 0$.

La funzione è convessa su $(-\infty, -\frac{\ln 2}{4})$, concava su $(-\frac{\ln 2}{4}, +\infty)$ e presenta un flesso in $-\frac{\ln 2}{4}$ (*non richiesto*: con coefficiente angolare della tangente pari a $1/(\sqrt{2} + 1)$).

`Domanda facoltativa.` Essendo strettamente crescente, f è invertibile sul suo dominio. Denotiamo g la sua inversa, cioè $g = f^{-1}$. Abbiamo: $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{Im}(f) = (0, \pi/4)$.

Ricordiamo che si costruisce la funzione inversa tramite la relazione "$g(y) = x''$ se e solo se $f(x) = y$. Osserviamo che $\arctan(\dots) = y$ se e solo se $(\dots) = \tan y$ se e solo se $(1 - \tan y)e^{2x} = \tan y$ se e solo se $e^{2x} = \frac{\tan y}{1-\tan y}$ se e solo se $x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\tan y}{1-\tan y}\right)$. Pertanto abbiamo $g(y) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{\tan y}{1-\tan y}\right)$.

Esercizio 2

a) Con la sostituzione $y = 2/x$, poiché $dy = -\frac{2}{x^2} dx$, l'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{x^3} \arctan \frac{2}{x} \, dx = -\frac{1}{4} \int y \arctan y \, dy.$$

Integrando per parti prendendo y come fattore integrante:

$$\int y \arctan y \, dy = \frac{y^2}{2} \arctan y - \int \frac{y^2}{2} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{y^2}{2} \arctan y - \frac{1}{2} \int \frac{y^2+1-1}{1+y^2} dy$$

Dividiamo ora il numeratore per il denominatore e otteniamo:

$$\frac{y^2}{2} \arctan y - \frac{1}{2} \int 1 dy + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{y^2}{2} \arctan y - \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \arctan y.$$

Ritornando alla variabile x e tenendo conto del fattore $-1/4$ a moltiplicare si ha che una primitiva di f(x) è $G(x) = -\frac{1}{2x^2} \arctan \frac{2}{x} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \arctan \frac{2}{x}$

b) Poiché $\arctan y \sim y$ se $y \to 0$, si ha che, per $x \to +\infty$ $f(x) = \frac{1}{x^3} \arctan \frac{2}{x} \sim \frac{1}{x^3} \frac{2}{x} = \frac{2}{x^4}$. Quindi per il principio del confronto asintotico $f(x)$ è asintotica ad un funzione che è integrabile in $(1, +\infty)$ e quindi è integrabile. Per calcolare l'integrale, si usa la definizione di integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arctan \frac{2}{x} \, dx = \lim_{K \to +\infty} \int_1^K \frac{1}{x^3} \arctan \frac{2}{x} \, dx = \lim_{K \to +\infty} G(K) - G(1)$$

dove $G(x)$ è la primitiva trovata sopra al punto a). Quindi si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \arctan \frac{2}{x} \, dx = \lim_{K \to +\infty} -\frac{1}{2K^2} \arctan \frac{2}{K} + \frac{1}{4K} - 1\frac{1}{8} \arctan \frac{2}{K} - 1 + \frac{5}{8} \arctan 2 = \frac{5}{8} \arctan 2 - 1.$$

Esercizio 3

(a) Dalle stime asintotiche $\sin x \sim x$ e $\tan x \sim x$ per $x \to 0$ e dal fatto che $\frac{1}{k^\alpha} \to 0$ per $k \to +\infty$, per ogni valore di $\alpha > 0$, è immediato dedurre che la successione a_k converge a 0 per $k \to +\infty$, per ogni $\alpha > 0$.

(b) Osserviamo che se $\alpha \in (0, 1)$, allora $\tan \frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k^\alpha} \sim -\frac{1}{k^\alpha}$, perché

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\tan \frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \lim_{t \to 0} \frac{\tan t - \sin t^\alpha}{t^\alpha} = \lim_{t \to 0} (t^{1-\alpha} - 1) = -1\,.$$

Dal confronto con la serie armonica generalizzata si deduce allora che la serie data non converge se $\alpha \in (0, 1)$.

Se $\alpha > 1$, si ha $\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{k}$, perché

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{k}} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan t - \sin t^\alpha}{t} = \lim_{t\to 0}(1 - t^{\alpha-1}) = 1\,.$$

Anche in questo caso, dal confronto con la serie armonica generalizzata si deduce allora che la serie data non converge se $\alpha > 1$.

Infine, se $\alpha = 1$, dagli sviluppi elementari si ottiene

$$\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{k} + \frac{1}{3!k^3} + o(\frac{1}{k^3}) = \big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3!}\big)\frac{1}{k^3} + o(\frac{1}{k^3})$$

per $k \to +\infty$. Dal confronto con la serie armonica generalizzata si deduce in questo caso che la serie data converge se $\alpha = 1$.

Esercizio 4

a) Il dominio di $f(x,y)$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato da tutte le coppie del piano tali che $x > 1$ e $y\log(x-1) > 0$. La seconda disuguaglianza porta a trovare i punti

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \begin{cases} y < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

quindi si ottiene che il dominio è $D = D_1 \cup D_2$ dove $D_1 = \{(x,y) : x > 2 \ e \ y > 0\}$ e $D_2 = \{(x,y) : 1 < x < 2 \ e \ y < 0\}$.
Il dominio è l'unione di due insieme aperti quindi è aperto.

b) L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(e+1,1)$ si ottiene dalla formula:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

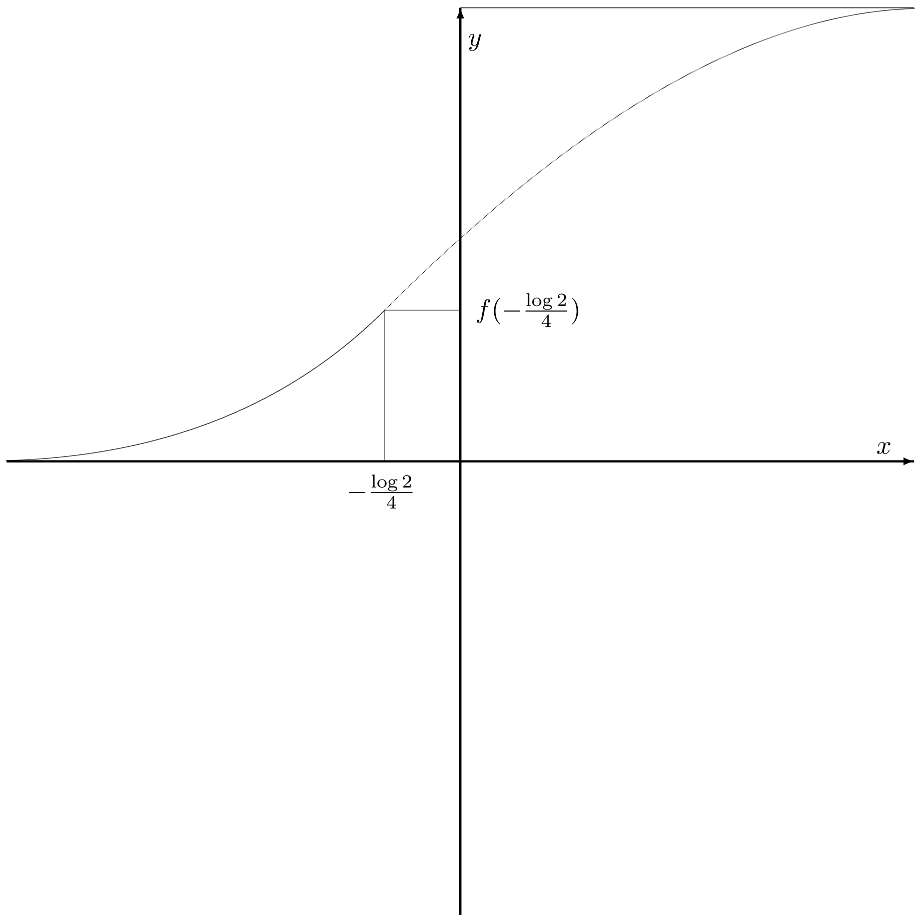
Si ha che $f(e+1,1) = 0$.

Calcoliamoci le derivate parziali di f:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y\log(x-1)}\frac{y}{x-1},\ f_y(x,y) = \frac{1}{y\log(x-1)}\log(x-1) = \frac{1}{y}.$$

Calcolate in $(e+1,1)$ si ha $f_x(e+1,1) = \frac{1}{e}$, $f_y(e+1,1) = 1$, da cui otteniamo l'equazione del piano tangente cercata:

$$z = \frac{1}{e}(x-e-1) + y - 1 = \frac{x}{e} + y - 2 - \frac{1}{e}.$$


y
$f(-\frac{\log 2}{4})$
x
$-\frac{\log 2}{4}$