ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 7 Febbraio 2012

Soluzioni del tema 1

Esercizio 1

(a) Osserviamo innanzitutto che la funzione f si può esprimere come

$$f(x) = \begin{cases} \log(e^{2x} - 1) + \frac{2}{e^{2x}-1} & \text{se } x > 0\,, \\ \log(1 - e^{2x}) + \frac{2}{e^{2x}-1} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Il dominio di f è l'insieme $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. La funzione non presenta simmetrie nè periodicità. Si ha, inoltre, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = (y = e^{2x} - 1) = \lim_{y\to 0^+} (\log y + 2/y) = +\infty$ (per gerarchia degli infiniti) e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.
La retta $y = -2$ è quindi asintoto orizzontale sinistro.
Per $x > 0$, osserviamo che

$$f(x) = 2x + \log\big(1 - \frac{1}{e^{2x}}\big) + \frac{2}{e^{2x} - 1}\,; \tag{1}$$

ciò implica $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ e $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - 2x\big) = 0$, così che la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo destro per f.

(b) La funzione è continua sul suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni continue. La funzione è inoltre derivabile nei punti del suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni derivabili.
Risulta, inoltre, per $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} - \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = \frac{2e^{2x}(e^{2x} - 3)}{(e^{2x} - 1)^2}\,,$$

così che f è decrescente sull'intervallo $(0, \frac{\log 3}{2})$, crescente in $(\frac{\log 3}{2}, +\infty)$.
Il punto $x_1 = \frac{\log 3}{2}$ è un punto di minimo relativo (non assoluto), e si ha $f(x_1) = \log 2 + 1$.
Per $x < 0$ si ha poi

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x}}{1 - e^{2x}} - \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} = -\frac{2e^{2x}(3 - e^{2x})}{(1 - e^{2x})^2}\,.$$

Poiché $e^{2x} < 3$ per ogni $x < 0$, risulta $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$, così che f è decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$.

Domanda facoltativa. Infine, per stabilire se esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 2x_0$ studiamo la convessità di f. Per calcolare la derivata seconda, scriviamo $f'(x) = h(g(x))$, $x > 0$, con $g(x) = e^{2x}$ e $h(t) = \frac{2t(t-3)}{(t-1)^2}$.
Poiché risulta $h(t) = 2 - \frac{2}{t-1} - \frac{4}{(t-1)^2}$, si ha allora

$$f''(x) = h'(g(x))\, g'(x) = 2e^{2x}\Big(\frac{2}{(e^{2x} - 1)^2} + \frac{8}{(e^{2x} - 1)^3}\Big) \geq 0$$

per ogni $x > 0$. Dalla convessità di f si deduce che non esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 2x_0$.
Un'altra possibilità consiste nello studiare il segno di $f(x) - 2x$ usando la formula (**??**). Si dimostra facilmente, usando gli sviluppi elementari per $x \to +\infty$, che $f(x) - 2x > 0$.

Esercizio 2

Innanzitutto consideriamo la sostituzione $e^x = y$. Poiché $e^x\,dx = dy$ si ha

$$\int \frac{2e^{2x} - 5e^x}{\sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6}}\,dx = \int \frac{2y - 5}{\sqrt{y^2 - 5y + 6}}\,dy.$$

Al numeratore si ha proprio la derivata della funzione sotto radice, quindi con la sostituzione $y^2-5y+6=z$, l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = 2z^{1/2}+C$$

e considerando le sostituzioni fatte si ha che una primitiva della funzione è $2\sqrt{e^{2x}-5e^x+6}+C$, $C\in\mathbb{R}$. Per calcolare l'integrale generalizzato basta usare la definizione:

$$\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{2e^{2x}-5e^x}{\sqrt{e^{2x}-5e^x+6}}\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_{\log 4}^{k} \frac{2e^{2x}-5e^x}{\sqrt{e^{2x}-5e^x+6}}\,dx = \lim_{k\to+\infty} 2\sqrt{e^{2k}-5e^k+6}-2\sqrt{2}=+\infty.$$

Quindi l'integrale diverge a $+\infty$.

Esercizio 3

(a) Dagli sviluppi elementari si deduce che

$$\begin{aligned} g(x) &= \log\left(1+\sin(3x)\right)-\alpha\arctan(3x)+\frac{9}{2}x^2 \\ &= \sin(3x)-\frac{1}{2}\big(\sin(3x)\big)^2+\frac{1}{3}\big(\sin(3x)\big)^3-3\alpha x+\frac{1}{3}\alpha(3x)^3+\frac{9}{2}x^2+o(x^3) \\ &= 3(1-\alpha)x+\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{3!}(3x)^3+9x^3+9\alpha x^3+o(x^3) \\ &= 3(1-\alpha)x+9(\alpha+\frac{1}{2})x^3+o(x^3)\,, \end{aligned}$$

per $x\to 0$, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ (si osservi che nel primo passaggio si è usata la relazione $o([\sin x]^3)=o(x^3)$).

(b) Affinchè risulti $g(x)=o(x^2)$ per $x\to 0$, il termine di primo grado nello sviluppo di g deve annullarsi. Bisogna quindi imporre $\alpha=1$.

Esercizio 4 Denotiamo $a_n := \frac{\sqrt{n}}{3n-2\log n}$.

*) *Convergenza assoluta.* Si deve studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Osserviamo che

$$a_n = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n}}_{=n^{-1/2}}\underbrace{\frac{1}{1-\frac{2\log n}{3n}}}_{\to 1};$$

in particolare ne deduciamo che $a_n \sim \frac{1}{3}n^{-1/2}$. Per il criterio del confronto asintotico, essendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/2}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente.

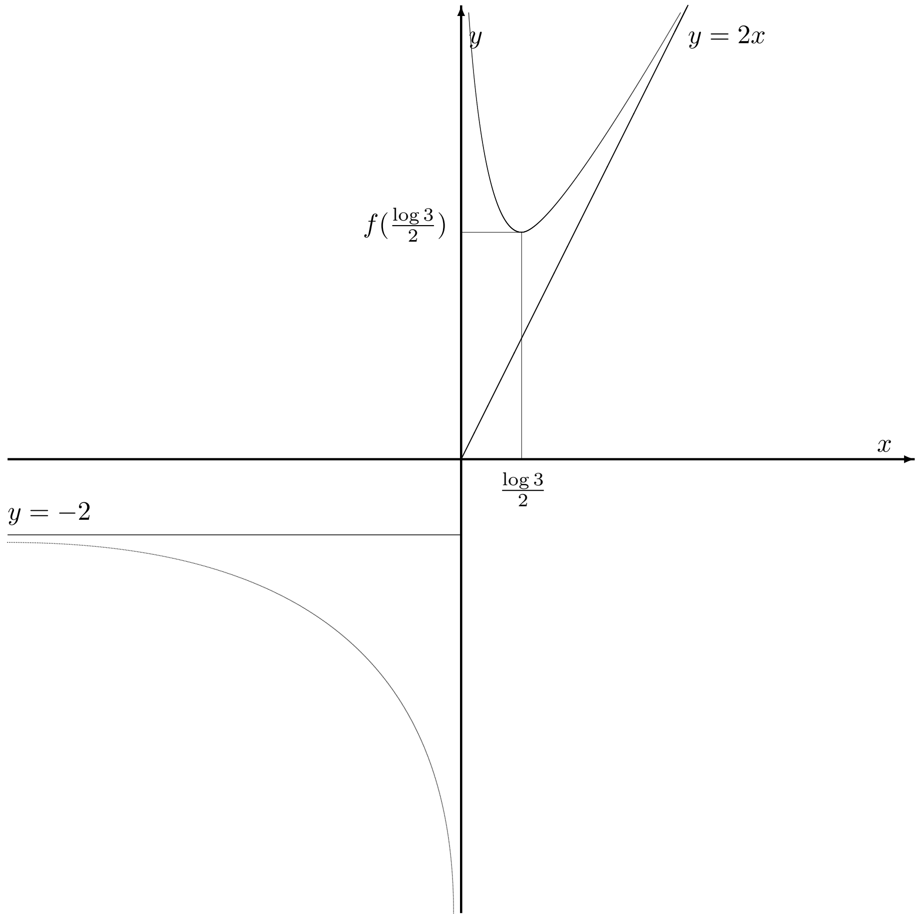
*) *Convergenza semplice.* Verifichiamo le ipotesi del criterio di Leibniz. Ovviamente abbiamo $a_n>0$. Inoltre, per i calcoli del punto precedente, abbiamo anche: $a_n\to 0$ per $n\to+\infty$. Rimane da dimostrare che a_n sia definitivamente decrescente. A questo scopo basta provare che la funzione

$$f(x) := \frac{\sqrt{x}}{3x-2\log x}$$

abbia derivata definitivamente negativa per $x\to+\infty$. Infatti si ha

$$f'(x)=\frac{-3x-2\log x+4}{2\sqrt{x}[3x-2\log x]^2}<0 \qquad \text{(almeno) per} \quad x>\frac{4}{3}.$$

In conclusione: tutte le ipotesi del criterio di Leibniz sono verificate e quindi la serie converge semplicemente.



y
$y = 2x$
$f(\frac{\log 3}{2})$
x
$\frac{\log 3}{2}$
$y = -2$