Fondamenti di Analisi Matematica 2 - a.a. 2010-11 (Canale 1)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Meccanica e Meccatronica

Valentina Casarino

Appunti sulle superfici

1. Superfici regolari

Ricordiamo che si dice *curva* in $\mathbb{R}^3$ una funzione continua $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, ove I è un intervallo della retta reale. L'immagine di γ, cheè un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, si dice *sostegno della curva.* Inoltre γ si dice *semplice* seè iniettiva.

Introduciamo ora il concetto di superficie (in forma parametrica), ottenuto sostituendo all'intervallo I un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1. Sia D un aperto connesso in $\mathbb{R}^2$. Diciamo **superficie** in $\mathbb{R}^3$ una funzione continua

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3 .$$

L'insieme immagine di σ

$$\Sigma := \sigma(D) = \{\sigma(u, v) : (u, v) \in D\}$$

viene detto il *sostegno* della curva. Se σè iniettiva, diciamo che la superficieè *semplice.*

Le equazioni

$$\begin{cases} x = \sigma_1(u, v) \\ y = \sigma(u, v) \\ z = \sigma_3(u, v) \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche* della superficie, mentre u e v sono i *parametri* di σ.

Esempio 1. I piani nello spazio sono esempi di superfici.

Esempio 2. La superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \, , & 0 < u < \pi \\ y = \sin u \sin v \, , & 0 < v < 2\pi \\ z = \cos u \, . \end{cases}$$

ha come sostegno una sfera di raggio 1 in $\mathbb{R}^3$, con centro nell'origine, privata di un meridiano.

Esempio 3. Si consideri il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Equazioni parametriche per questa superficie sono, per esempio,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Esempio 4. Le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \,, \quad u^2 + v^2 < 1 \end{cases}$$

rappresentano la parte del grafico di $z = x^2 + y^2$ che giace sopra il cerchio (del piano xy) $x^2 + y^2 < 1$.

Più in generale, se $f : D \to \mathbb{R}$è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in D, allora l'applicazione da D in $\mathbb{R}^3$

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix} \tag{1}$$

è una superficie semplice, il cui sostegno coincide con il grafico di f. Una superficie di questo tipo, o del tipo

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ g(u, v) \\ v \end{pmatrix}$$

o

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} h(u, v) \\ u \\ v \end{pmatrix},$$

con g e h funzioni in $\mathcal{C}^1(D)$, viene detta *cartesiana*.

Ricordiamo inoltre che una delle nozioni più significative nella teoria delle curve è quella di curva regolare. Nel caso delle curve, il concetto di regolarità garantiva l'esistenza del vettore tangente in ogni punto. L'estensione di questa nozione al caso delle superfici non è immediata; riusciremo comunque a definire anche in questo caso una nozione di regolarità, in grado di garantire l'esistenza del piano tangente in ogni punto.

Definizione 2. Una superficie σ si dice *regolare* se $\sigma \in \mathcal{C}^1(D)$ e se i due vettori

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \;\; e \;\; \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

sono linearmente indipendenti (in particolare, entrambi sono non nulli) in ogni punto $(u, v) \in D$.

Il fatto che i due vettori $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$ siano linearmente indipendenti si può esprimere in diversi modi: una possibilitàè per esempio richiedere che la matrice jacobiana

$$J_{(u,v)}\sigma := \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{2}$$

abbia rango uguale a 2 in ogni punto $(u, v) \in D$.

Osserviamo anche che, indicati con $A(u,v)$, $B(u,v)$ e $C(u,v)$ i minori di ordine due della matrice jacobiana (2), vale a dire

$$A(u,v) = \det\frac{\partial(\sigma_2,\sigma_3)}{\partial(u,v)}\,, \quad B(u,v) = \det\frac{\partial(\sigma_3,\sigma_1)}{\partial(u,v)}\,, \quad C(u,v) = \det\frac{\partial(\sigma_1,\sigma_2)}{\partial(u,v)}\,,$$

la condizione di indipendenza lineare è equivalente a richiedere che per ogni coppia $(u,v) \in D$ il vettore $(A(u,v), B(u,v), C(u,v))$ non si annulli, cioè che

$$A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v) > 0\,.$$

Da un punto di vista formale, può essere utile scrivere questa condizione utilizzando la nozione di prodotto esterno. Ricordiamo che se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due vettori in $\mathbb{R}^3$, si definisce *prodotto esterno* o *prodotto vettoriale* di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ il vettore

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\,.$$

Allora la condizione che i due vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ siano linearmente indipendenti si può scrivere più brevemente nella forma

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} \neq 0 \;\; \forall (u,v) \in D\,. \tag{3}$$

IL vettore $\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}$ svolge un ruolo particolare nella teoria delle superfici. Infatti, se $(\bar u, \bar v) \in D$, il vettore

$$N(\bar u,\bar v) := \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\bar u,\bar v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\bar u,\bar v) \tag{4}$$

viene detto *vettore normale* alla superficie in $\bar P = \sigma(\bar u,\bar v)$. Si osservi che

$$N(\bar u,\bar v) = \big(A(\bar u,\bar v), B(\bar u,\bar v), C(\bar u,\bar v)\big)$$

e che

$$\|N(\bar u,\bar v)\|^2 = A^2(\bar u,\bar v) + B^2(\bar u,\bar v) + C^2(\bar u,\bar v)\,.$$

Il versore

$$n(\bar u,\bar v) = \frac{N(\bar u,\bar v)}{\|N(\bar u,\bar v)\|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{A^2(\bar u,\bar v) + B^2(\bar u,\bar v) + C^2(\bar u,\bar v)}}\big(A(\bar u,\bar v), B(\bar u,\bar v), C(\bar u,\bar v)\big)\Big)$$

viene detto *versore normale* alla superficie in $\bar P = \sigma(\bar u,\bar v)$.

Esempio 5. Se fè di classe $\mathcal{C}^1$, ogni superficie cartesiana nella forma (1)è regolare. È facile verificare, infatti, che

$$J_{(u,v)}\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

ha rango 2 in ogni punto (u,v) di D. Risulta inoltre

$$n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}\big(-f_u, -f_v, 1\big)\,.$$

Si può dimostrare che se σ rappresenta una superficie regolare con sostegno Σ e $\bar{P} = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$, $(\bar{u}, \bar{v}) \in D$, allora esiste un unico piano tangente alla superficie (o meglio, al suo sostegno) in $\bar{P}$. Esso risulta essere ortogonale al versore normale e ha quindi equazione

$$A(\bar{u}, \bar{v})(x - \bar{x}) + B(\bar{u}, \bar{v})(y - \bar{y}) + C(\bar{u}, \bar{v})(z - \bar{z}) = 0\,,$$

ove $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sono le coordinate di $\bar{P} = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$.

Infine, si dice che ogni parametrizzazione del sostegno Σ di una superficie semplice e regolare σ individua su di esso un *verso di attraversamento* o *orientamento*. Ogni sostegno di superficie semplice e regolare ha quindi due orientamenti possibili. Il fatto di scegliere l'uno o l'altro fra questi due orientamenti è puramente convenzionale.

Esempio 6. Se σè una superficie cartesiana della forma (1), risulta allora

$$N(u, v) = \big(- f_u(u, v), -f_v(u, v), 1 \big)\,,$$

così che la componente lungo l'asse z del vettore normaleè positiva. Per convenzione, si dice che l'orientamento del grafico di una funzione $z = f(x, y)$ (che, come abbiamo visto, coincide con il sostegno di Σ) è nel verso delle z positive.

2. Integrali di superficie

Sia $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie semplice e regolare.

Definizione 3. Si dice *calotta di* σ la restrizione di σ a un qualsiasi compatto K misurabile contenuto in D.

Con abuso di linguaggio, parleremo talvolta di "area di una calotta", anzichè di area del sostegno di una calotta.

Definizione 4. Sia $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare.[1] Sia Σ_K il sostegno della calotta. Si definisce l'area $\mathcal{A}_\sigma$ della calotta come

$$\mathcal{A}_\sigma := \int_K \|N(u, v)\|\, du\, dv\,.$$

Si può dimostrare che l'area di una calotta regolare non dipende dalla particolare parametrizzazione adottata, nè dall'orientamento scelto.

Esempio 7 (area di un grafico).
Se σè una superficie cartesiana della forma (1), cioè

$$\sigma(u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

con $f : D \to \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in D e Kè un compatto misurabile contenuto in D, ricordando che

$$N(u, v) = \big(- f_u(u, v), -f_v(u, v), 1 \big)\,,$$

si ha immediatamente che

$$\mathcal{A}_\sigma := \int_K \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, du\, dv\,.$$

[1]Questo significa che si considera la restrizione a K di una superficie regolare definita su un aperto connesso D, contenente K.

Ci limitiamo nel seguito a dare la definizione di integrale di una una funzione continua sul sostegno di una calotta regolare, omettendo le dimostrazioni.

Definizione 5. Sia $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta regolare con sostegno Σ_K. Sia f una funzione continua e limitata su Σ_K. Si definisce integrale superficiale di f sulla calotta σ il numero

$$\int_\sigma f := \int_K f(\sigma(u,v))\, \|N(u,v)\|\, du\, dv\,.$$

Si osservi che nel caso $f \equiv 1$ si ritrova ovviamente la definizione di area della calotta σ.

Gli integrali di superficie intervengono nel calcolo di masse, baricentri, momenti di inerzia e di altre grandezze fisiche associare a corpi laminari. Essi sono anche alla base della nozione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

3. Il teorema di Green

Ricordiamo che se F è un campo vettoriale continuo su un aperto di A in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$ e $\gamma : [a,b] \to A$ è una curva chiusa, semplice e regolare, l'integrale curvilineo di seconda specie $\int_\gamma F$ viene anche detto *circuitazione* di F lungo γ e viene denotato con il simbolo $\oint_\gamma F$.

Il Teorema di Gauss-Green stabilisce una relazione fra certi integrali doppi su un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ e certe circuitazioni lungo la frontiera dell'aperto. Più precisamente, vale in seguente risultato.

Teorema (Gauss-Green) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$, contenuto in A insieme alla sua frontiera. Sia $F = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ in A. Supponiamo che la frontiera di Ω coincida con il sostegno di una curva chiusa, semplice, regolare a tratti γ. Supponiamo inoltre che γ sia percorsa in senso antiorario. Vale allora

$$\oint_\gamma F = \int\int_\Omega \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dxdy\,. \tag{3.1}$$

Dim. Dimostriamo il teorema in un caso particolare. Supponiamo infatti che Ω sia un dominio semplice rispetto all'asse x, della forma

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c < y < d\,,\, \alpha(y) < x < \beta(y)\,\}\,,$$

con α e β funzioni continue sull'intervallo $[c,d]$. Supponiamo inoltre che $F_1 = 0$, cioè che il campo F sia uguale a $(0, F_2)$. Sotto queste ipotesi addizionali la formula (3.1) si riduce a

$$\int_\gamma F_2\, dy = \int\int_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\, dy\,. \tag{3.2}$$

Calcoliamo i due integrali della formula (3.2) separatamente. Osserviamo che la frontiera di Ω è il sostegno dell'arco chiuso $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, ove

$\gamma_1(x) = (x, c)$, $\alpha(c) \le x \le \beta(c)$,
$\gamma_2(y) = (\beta(y), y)$, $c \le y \le d$,
$(-\gamma_3)(x) = (x, d)$, $\alpha(d) \le x \le \beta(d)$,
$(-\gamma_4)(y) = (\alpha(y), y)$, $c \le y \le d$.

L' integrale di F lungo γ_1 e γ_3 dà contributo nullo (perché y è costante lungo queste due curve), così che

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F_2\, dy &= \int_{\gamma_1} F_2\, dy + \int_{\gamma_2} F_2\, dy + \int_{\gamma_3} F_2\, dy + \int_{\gamma_4} F_2\, dy \\
&= \int_{\gamma_2} \langle (0, F_2(\beta(y), y)), (\beta'(y), 1)\rangle\, dy + \int_{\gamma_4} \langle (0, F_2(\alpha(y), y)), (\alpha'(y), 1)\rangle\, dy \\
&= \int_c^d F_2(\beta(y), y)\, dy + \int_d^c F_2(\alpha(y), y)\, dy \\
&= \int_c^d F_2(\beta(y), y)\, dy - \int_c^d F_2(\alpha(y), y)\, dy \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Consideriamo ora l'integrale a destra nella formula (3.2). Applicando la formula di riduzione per integrali doppi si ottiene

$$\int\int_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx\, dy\,.$$

Ora il Teorema fondamentale del Calcolo integrale implica

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx\, dy &= \int_c^d \Big(F_2(\beta(y), y) - F_2(\alpha(y), y)\Big)\, dy \\ &= \int_c^d F_2(\beta(y), y)\, dy - \int_c^d F_2(\alpha(y), y)\, dy\,. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Un confronto fra (3.3) e (3.4) ci permette di concludere la dimostrazione del teorema in questo caso particolare. □

Il Teorema di Green si può in realtà dimostrare in situazioni più generali rispetto a quella considerata sopra. In particolare, si può provare che esso vale per un campo vettoriale $F = (F_1, F_2)$ continuo in un aperto connesso Ω, la cui frontiera è l'unione di un numero finito di sostegni, a due a due disgiunti, di curve chiuse, semplici e regolari a tratti γ_1, ..., γ_m (ciò significa che ognuna possiede una parametrizzazione di classe $\mathcal{C}^1$ con vettore tangente non nullo, eccetto al più in un numero finito di punti).

Come abbiamo visto prima, la formula di Green (3.1) coinvolge circuitazioni di F. Poichè gli integrali curvilinei di seconda specie dipendono dal verso di percorrenza della curva, è necessario scegliere una *orientazione* di $\partial\Omega$.

Definizione 6. Se Ω è un aperto connesso come sopra, diciamo che la sua frontiera (intesa come unione di curve) è *orientata positivamente* se un osservatore ideale che la percorra vede Ω alla sua sinistra.

Per esempio, se Ω è una regione piana delimitata da una singola curva chiusa, allora l'orientazione positiva di $\partial\Omega$ è quella antioraria. Se invece Ω è, per esempio, una corona circolare, allora l'orientazione positiva di $\partial\Omega$ si ottiene percorrendo in senso antiorario la circonferenza esterna e in senso orario quella interna.

Se la frontiera di Ω è orientata positivamente, si dice anche che Ω è un *aperto con bordo*. Siamo ora in grado di enunciare il Teorema di Gauss-Green sotto ipotesi più generali rispetto a prima.

Teorema di Green (formulazione generale) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia Ω un aperto con bordo in $\mathbb{R}^2$, contenuto in A insieme alla sua frontiera.. Siano γ_1, ..., γ_m le curve chiuse, semplici e regolari a tratti che formano la frontiera di Ω. Sia $F = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ in A. Vale allora

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} F = \int\int_{\Omega} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big) dxdy\,. \qquad (3.5)$$

Un'importante conseguenza del Teorema di Green è questa. Se scegliamo come campo vettoriale F il campo $(0, x)$ oppure $(-y, 0)$, si ha $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$, così che la formula (3.1) ci permette di calcolare l'area di un dominio piano attraverso un integrale di linea. Più precisamente, vale il seguente

Corollario. Sia Ω un aperto con bordo in $\mathbb{R}^2$. Sia F un qualsiasi campo vettoriale tale che $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Vale allora

$$m(\Omega) = \int_\gamma F .$$

4. Integrali di flusso

Sia K un compatto misurabile in $\mathbb{R}^2$. Sia $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ una calotta semplice e regolare. Sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo e limitato su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$. Supponiamo inoltre che $\sigma(K) \subseteq \Omega$.

Il prodotto scalare $\langle F(\sigma(u,v)) \, , \, n(u,v) \rangle$ rappresenta la componente del campo F lungo la direzione del versore normale $n(u,v)$ in un punto $\sigma(u,v)$ del sostegno della calotta (con $(u,v) \in K$).

Definizione 7. Si dice *flusso del campo F attraverso la calotta σ* l'integrale della componente di F lungo la direzione del versore normale $n(u,v)$ sulla superficie σ, vale a dire

$$\int_\sigma \langle F \, , \, n \rangle := \int_K \langle F(\sigma(u,v)) \, , \, n(u,v) \rangle \|N(u,v)\| \, dudv . \tag{4.1}$$

In base alla Definizione 5 si ottiene

$$\begin{aligned} \int_\sigma \langle F \, , \, n \rangle &:= \int_K \langle F(\sigma(u,v)) \, , \, n(u,v) \rangle \|N(u,v)\| \, dudv \\ &= \int_K \langle F(\sigma(u,v)) \, , \, \frac{N(u,v)}{\|N(u,v)\|} \rangle \|N(u,v)\| \, dudv \\ &= \int_K \langle F(\sigma(u,v)) \, , \, N(u,v) \rangle \, dudv \end{aligned}$$

ove il vettore normale $N(u,v)$ è stato definito in (4).

Valgono i seguenti fatti:

- l'integrale di flusso non dipende dalla particolare parametrizzazione scelta per la calotta.
- Se $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale continuo sull'aperto Ω e $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ e $\sigma' : K' \to \mathbb{R}^3$ sono due calotte semplici con lo stesso sostegno (contenuto in Ω), che però individuano sul sostegno comune due versori normali opposti, si ha allora
$$\int_\sigma \langle F \, , \, n \rangle = - \int_{\sigma'} \langle F \, , \, n \rangle .$$

Osservazione 1. Spesso, quando si vuole descrivere l'orientamento di una calotta, si fa riferimento al sostegno, anzichè alla parametrizzazione. Per esempio, vi verrà spesso chiesto di calcolare il flusso uscente da una porzione di una certa superficie. In questo caso, per svolgere i calcoli occorre introdurre una opportuna parametrizzazione della superficie, controllando poi che l'orientamento fornito da questa parametrizzazione coincida con quello richiesto dal problema. Se così non fosse, si può procedere comunque con i calcoli, cambiando poi segno al risultato finale.

Osservazione 2. Noi abbiamo definito il flusso di un campo attraverso una calotta, ma è possibile estendere questa definizione in modo naturale anche a superfici più complicate, in particolare a *superfici regolari a pezzi,* cioè a superfici contenenti un numero finito di curve regolari a tratti, dette spigoli, che le suddividono in un numero finito di superfici regolari, dette facce, in modo che ogni spigolo confini con al più due facce.

Quando per esempio si parla di flusso di un campo F attraverso un cubo, si intende la somma dei sei flussi di F attraverso le sei facce del cubo, orientate in modo tale che il versore normale sia orientato verso l'esterno del cubo.

5. Il Teorema di Stokes

Il Teorema di Stokes (o *del rotore*) costituisce un'estensione del Teorema di Gauss-Green dal piano allo spazio. Esso mette infatti in relazione integrali di superficie (più precisamente, integrali di flusso) con integrali curvilinei in $\mathbb{R}^3$. Consideriamo una calotta $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$, con K compatto misurabile in $\mathbb{R}^2$. Supponiamo anche che l'interno di K sia un aperto con bordo e che il bordo di K sia formato da un numero finito di curve chiuse $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$. Quando applichiamo σ a ognuna di queste curve γ_j, otteniamo degli archi di curva chiusi e regolari $\Gamma_j := \sigma(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, m$ in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 8. Diciamo *bordo della calotta* σ l'unione degli archi chiusi e regolari $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$.

Ogni arco Γ_j eredita un orientamento dall'arco γ_j tale che $\sigma(\gamma_j) = \Gamma_j$. Più in particolare, il verso di percorrenza di Γ_j è tale che un osservatore ideale che percorra Γ_j appoggiato sulla faccia della calotta da cui esce il versore normale n veda la calotta alla sua sinistra.

Teorema di Stokes

Sia σ una calotta $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$, con K compatto misurabile in $\mathbb{R}^2$.

Sia F un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, ove Ω è un aperto contenente il sostegno $\sigma(K)$ della calotta. Il bordo della calotta σ sia l'unione di un numero finito di archi chiusi e regolari $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$.

Vale allora
$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} F = \int_{\sigma} (\mathrm{rot} F) \cdot n \,,$$
cioé la circuitazione di F lungo il bordo della calotta $\partial\sigma$ è uguale al flusso del campo rot F.

6. IlTeorema della divergenza

Presentiamo infine il Teorema di Gauss (*della divergenza*) che mette in relazione integrali di flusso con integrali tripli in $\mathbb{R}^3$.

Ricordiamo che se F è un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$, si dice *divergenza* di F il campo scalare
$$\mathrm{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\,.$$

Iniziamo, in realtà, da una versione del Teorema della divergenza nel piano.

Teorema di Gauss (in $\mathbb{R}^2$)

Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia Ω un aperto con bordo in $\mathbb{R}^2$, contenuto in A insieme alla sua frontiera $\partial\Omega$. Sia $F = (F_1, F_2)$ un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ in A. Vale allora

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n = \int\int_{\Omega} \text{div } F \, dxdy \,. \tag{6.1}$$

Dim. Applicando la formula (3.1) ai campi $(0, f)$ e $(f, 0)$ otteniamo rispettivamente

$$\oint_{\partial\Omega} f \, dy = \int\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dxdy \,. \tag{6.2}$$

e

$$\oint_{\partial\Omega} f \, dx = -\int\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dxdy \,. \tag{6.3}$$

Applichiamo ora la formula (6.2) alla componente F_1 e la formula (6.3) alla componente F_2, ottenendo

$$\oint_{\partial\Omega} F_1 \, dy = \int\int_{\Omega} \frac{\partial F_1}{\partial x} dxdy \,.$$

e

$$\oint_{\partial\Omega} F_2 \, dx = -\int\int_{\Omega} \frac{\partial F_2}{\partial y} dxdy \,.$$

Sottraendo membro a membro queste due equazioni otteniamo

$$\oint_{\partial\Omega} F_1 \, dy - F_2 \, dx = \int\int_{\Omega} (\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}) dxdy \,. \tag{6.4}$$

Confrontando (6.1) e (6.4), vediamo che per concludere è sufficiente dimostrare che

$$\oint_{\partial\Omega} F_1 \, dy - F_2 \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n \,. \tag{6.5}$$

Per provare questa uguaglianza, parametrizziamo il bordo di Ω attraverso le equazioni $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$. Il versone normale orientato verso l'esterno è allora dato da

$$n = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \Big(y'(t), -x'(t) \Big) \,,$$

così che

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \,. = \int_a^b \Big(\frac{F_1 y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} - \frac{F_2 x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \Big) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$= \int_a^b (F_1 y'(t) - F_2 x'(t)) dt = \int_{\partial\Omega} F_1 \, dy - F_2 \, dx.$$

$\square$

Presentiamo infine l'enunciato del Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$.

Sia Ω un aperto connesso e limitato in $\mathbb{R}^3$. Diciamo che Ω è un aperto con bordo se la sua frontiera è l'unione di un numero finito di sostegni $\Sigma_1 \cup \ldots \Sigma_m$ di calotte semplici e regolari $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, orientate secondo il verso uscente da Ω. Si dice, in questo caso, che queste calotte costituiscono il *bordo* di Ω, $\partial\Omega$.

Definizione 8. Si dice *flusso totale uscente* da Ω di un campo vettoriale F è dato da

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n = \sum_{j=1}^{m} \int_{\sigma_j} F \cdot n$$

Vale allora il seguente teorema

Teorema di Gauss (in $\mathbb{R}^3$)

Sia F un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1(A)$, e sia Ω un aperto con bordo contenuto in A con il suo bordo. Vale allora

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dxdydz \, .$$