ANALISI REALE E COMPLESSA

a.a. 2005-2006

Esercizi sulle funzioni di variabile complessa

0) Svolgere i seguenti esercizi del testo: 4.1-3, 4.1-4 a p. 114; 4.3-6 a p. 135; 4.4-5,-6,-7 a p. 142; 4.5-1 a p. 163; 4.7-1,-2,-3 a p. 179; 4.8-3 a p. 186.

1) Classificare le singolarità delle funzioni

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(\cosh 2\pi z - 1)}, \quad g(z) = \frac{\sinh z}{\sin z \sin(1/z - i\pi)}.$$

2) Calcolare i seguenti integrali con il metodo dei residui, specificando se l'integrando è sommabile oppure integrabile in senso generalizzato:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi x}{(x^2+2x+2)^2}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)}\, dx.$$

(per il primo integrale, si usi $\cos 2\pi x = (e^{2\pi ix} + e^{2\pi ix})/2$, che dà $I = \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi x}/(x^2 + 2x+2)^2\, dx = e^{-2\pi}\pi(1+2\pi)/2$; il risultato del secondo integrale è $\pi \sinh 1/2e$)

3) Scrivere lo sviluppo di Laurent in un intorno forato del punto $z_0 = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}.$$

Calcolare la corona di convergenza e il residuo della funzione in tale punto.

4) Considerata la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1+e^{z^2}},$$

studiarne le singolarità e calcolarne i residui nei punti singolari isolati.
(Risultato: poli di ordine 1 in $z_k = \pm\sqrt{(2k+1)\pi}e^{i\pi/4}$, e in $w_k = \pm\sqrt{(2k+1)\pi}e^{i3\pi/4}$, $k = 0, 1, \ldots$)

5) Calcolare

$$I = \int_\gamma \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1} dz,$$

dove γ è la curva semplice costituita dalla frontiera del rettangolo di vertici $(0, -i)$, $(2, -i)$, $(2, i)$, $(0, i)$ percorsa in senso antiorario.
(Risultato: $I = -\pi i$)

6) Calcolare, usando il teorema dei residui,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} dx.$$

(Risultato : I=$\frac{e^{-2}}{2}\pi$).

7) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{e^{\pi z}-1}{z^3+2iz^2-z}dz,$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

8) (Mariconda) Sia f la funzione

$$f(z)=\frac{e^{2iz}-e^{iz}}{z^2}.$$

i) Trovare gli zeri di $e^{2iz}-e^{iz}$.

ii) Trovare le singolarità di $f(z)$ e determinarne i residui.

iii) Dire se esiste finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}dx$$

e in caso affermativo, utilizzando il metodo dei residui, calcolarlo. (Risultato: $-\pi$)

9) (Dal compito del 16.12.2004) Data la funzione

$$f(z)=\frac{\sinh(1/z)}{z^m}$$

i) calcolarne la serie di Laurent di $f(z)$ ed il residuo in $z=0$ al variare del parametro $m\in\mathbf{Z}$.

ii) Dire per quali valori del parametro m l'integrale $\int_\gamma f(z)dz$ è diverso da zero e calcolarlo (γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1).

iii) Classificare le singolarità, al variare del parametro m, della funzione

$$g(z)=f(z)\frac{z}{\sinh z}.$$

10) (Dal compito del 11.1.2005) Si consideri la funzione $f(z)=\frac{e^{3iz}}{(2z^2+1)^2}$. Si chiede di

i) trovarne i residui nelle proprie singolarità;

ii) dire se esiste finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(2x^2+1)^2}\,dx$$

e in caso affermativo calcolarlo usando il metodo dei residui.

iii) Classificare le singolarità di $g(z)=f(z)\,\frac{z-\sqrt{2\pi}}{\cos(z^2)-1}$.

11) (Dal compito del 7.9.2005) Si consideri la funzione

$$f(z)=\frac{1}{1-e^{z^2}}.$$

Si chiede di

i) studiarne le singolarità e calcolare i relativi residui, ove possibile;

ii) scrivere la parte caratteristica della serie di Laurent di f in un intorno di $z=0$.