ANALISI REALE E COMPLESSA

Commissione Colombo, Mannucci

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Risoluzione della prova scritta del 16.12.2004

TEMA 1

1) [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - x, \qquad x \in [0, 3].$$

a) Si dica se la serie di Fourier della prolungata dispari 6-periodica f_d di f converge uniformemente a f_d in $\mathbb{R}$; stessa domanda per la prolungata pari f_p.
b) Si calcolino i coefficienti di Fourier della prolungata pari f_p di f.
c) Se ne deduca la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\frac{(2n+1)\pi}{3}.$$

Svolgimento.
a) La f_d non è continua in $\mathbb{R}$, quindi la serie di Fourier di f_d non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. La funzione f_p è continua in $\mathbb{R}$ e C^1 a tratti, quindi sono soddisfatte le ipotesi del criterio di convergenza totale (e quindi uniforme) della sua serie di Fourier.
b) $a_0 = \frac{2}{6}\int_{-3}^{3}(1-|x|)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 (1-x)\,dx = -1.$
$a_k = \frac{2}{3}\int_0^3 (1-x)\cos\frac{k\pi}{3}x\,dx = \frac{6}{k^2\pi^2}(1-\cos k\pi) = \frac{12}{(2k+1)^2\pi^2}.$
Quindi $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha
$f_p(x) = -1/2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}x.$
c) In particolare per $x = 1$ si ha
$0 = f_p(1) = -1/2 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{12}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{3}$ da cui $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{3} = \frac{\pi^2}{24}.$

2) [8 punti] Data la funzione

$$f(z) = \frac{\sinh(1/z)}{z^m}$$

i) calcolarne la serie di Laurent di $f(z)$ ed il residuo in $z = 0$ al variare del parametro $m \in \mathbf{Z}$.
ii) Dire per quali valori del parametro m l'integrale $\int_\gamma f(z)dz$ è diverso da zero e calcolarlo (γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1).
iii) Classificare le singolarità, al variare del parametro m, della funzione

$$g(z) = f(z)\frac{z}{\sinh z}.$$

Svolgimento.
i) La serie di Laurent di $f(z)$ in un intorno di $z = 0$ si ottiene dalle serie di Taylor della funzione $f(w) = \sinh w = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}w^{2k+1}$.
Quindi
$f(z) = \frac{1}{z^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+m+1}}.$

Il coefficiente di $1/z$, che è il residuo di $f(z)$ in $z = 0$, è non nullo se e solo se $2k + m + 1 = 1$ cioè se $m = -2k$, $k \in I\!N$ e in tal caso risulta $c_{-1} = \frac{1}{(1-m)!}$.
ii) Da i) risulta che $\int_\gamma f(z)dz = \frac{2\pi i}{(1-m)!}$ se $m = -2k$, $k \in I\!N$, mentre negli altri casi si ha $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
iii) Le singolarità di $g(z)$ sono $z = 0$ e $z_k = k\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$.
I punti $z_k = k\pi i$ sono poli semplici: infatti $\lim_{z\to z_k}(z - z_k)g(z)$ esiste finito e diverso da zero.
Il punto $z = 0$ è una singolarità essenziale: infatti se $z \to 0$, $\frac{z}{\sinh z} \to 1$, quindi si ha che $\lim_{z\to 0} z^n\, g(z) = \lim_{z\to 0} z^n\, f(z)$ non esiste per nessun $n \in I\!N$.

3) (i) Si calcoli la trasformata di Fourier e la derivata della distribuzione $\delta(x - 2)$.
(ii) Si provi che $T(x) = (x^2 + 1)\delta(x - 2)$ è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.
(iii) Si calcoli la trasformata di Fourier di T.

Svolgimento. (i) Dalle proprietà della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$ si ha che $\mathcal{F}[\delta(x - 2)](\omega) = e^{-2i\omega}$. Inoltre, per ogni $v \in \mathcal{D}(I\!R)$ si ha $\langle\delta'(x-2), v(x)\rangle = -\langle\delta(x-2), v'(x)\rangle = -\langle\delta(x), v'(x+2)\rangle = -v'(2)$.
(ii) Ci sono vari modi per farlo. Il più semplice è calcolare T: si ha, per ogni $v \in \mathcal{D}(I\!R)$, $\langle(x^2 + 1)\delta(x - 2), v(x)\rangle = \langle\delta(x - 2),(x^2 + 1)v(x)\rangle = (4 + 1)v(2) = 5v(2)$. Cioè $T(x) = 5\delta(x - 2)$. Perciò automaticamente T è una distribuzione temperata (essendo tale la δ) , $\hat{T}(\omega) = 5e^{-2i\omega}$ e $T'(x) = 5\delta'(x - 2)$.

4) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{y^3}{1 + x^2e^{|y|}}.$$

a) Si provi che f è sommabile in $I\!R^2$;
b) si calcoli $\iint_{I\!R^2} f(x, y)\, dxdy$.

Svolgimento. Usiamo il teorema di Tonelli per provare che $|f|$ è sommabile. Risulta, per ogni $y \in I\!R$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y|^3}{1 + x^2e^{|y|}}\, dx = \pi|y|^3e^{-|y|/2}.$$

Quest'ultima funzione è sommabile in $I\!R$ perché è continua, e quindi localmente sommabile, ed infinitesima di ordine (ad esempio) > 2 per $|y| \to +\infty$. Dunque f è sommabile in $I\!R^2$. Per il teorema di Fubini,

$$\iint_{I\!R^2} f(x, y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^3}{1 + x^2e^{|y|}}\, dy\right) dx = 0,$$

dato che $f(x, \cdot)$ è dispari per ogni x.

5) (Facoltativo) Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(t) = n^n\chi_{[\sqrt{n}-2,\sqrt{n}]}(t), \qquad n \in I\!N.$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme in $I\!R$ di $\{f_n(t)\}$. Si studi inoltre la convergenza di $\{f_n(t)\}$ in $\mathcal{D}'(I\!R)$ e in $\mathcal{S}'(I\!R)$.

Svolgimento. Per ogni t fissato, $f_n(t)$ è definitivamente costante ed uguale a 0. Perciò f_n converge puntualmente in $I\!R$ alla funzione nulla. Siccome $\max_{t\in I\!R} |f_n(t)| = n^n \to +\infty$, non c'è convergenza uniforme. C'è convergenza in $\mathcal{D}'(I\!R)$, perché per ogni $v \in \mathcal{D}(I\!R)$, se il supporto di v è contenuto nell'intervallo $[a,b]$, allora per n abbastanza grande ($n > \max\{|a|,|b|\}$) si ha che $f_n(t)v(t) = 0$ per ogni $t \in I\!R$; cioè la successione $\langle f_n(t), v(t)\rangle$ è definitivamente costante (e nulla). La successione non converge in $\mathcal{S}'(I\!R)$: basta scegliere $v(x) = e^{-x^2}$. Si ha:

$$\langle f_n(t), v(t)\rangle = \int_{\sqrt{n}-2}^{\sqrt{n}} n^n e^{-t^2}\,dt \geq 2n^n e^{-(\sqrt{n}-2)^2} = 2e^{-4} n^n e^{-n} e^{2\sqrt{n}} \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \to +\infty.$$