ANALISI REALE E COMPLESSA

Commissione Colombo, Mannucci

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 7.9.2005

1) [8 punti] Si consideri la funzione

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s/2}}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{1+s^2} + \frac{se^{-\pi s/2}}{1+s^2}, \qquad Re\, s > 0.$$

(i) Si provi che essa è trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$, da calcolarsi.
(ii) Si calcoli e si disegni il grafico dell'antitrasformata di Laplace di

$$G(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} F(s).$$

Svolgimento. F è olomorfa per $\mathrm{Re}\, s > 0$ ed infinitesima per $\mathrm{Re}\, s \to +\infty$ e quindi è trasformata di Laplace di una $f(t)$. Dalle regole di trasformazione risulta immediatamente

$$f(t) = H(t) - H(t-\pi/2) + \sin(t-\pi)H(t-\pi) + \cos(t-\pi/2)H(t-\pi/2) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \le t \le \pi/2 \\ \sin t & \pi/2 < t \le \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

Siccome f è nulla fuori di $[0, \pi]$, G è la trasformata di Laplace della ripetizione π-periodica di f (per $t > 0$).

2) [10 punti] Si consideri la funzione $f(x) = x|x|$ se $|x| \le 1$, $f(x) = 0$ se $|x| > 1$.
(i) Si provi che $f \in L^1(I\!R) \cap L^2(I\!R)$.
(ii) Si calcoli la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di f.
(iii) Si provi che $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(I\!R) \cap L^2(I\!R)$; ci sono teoremi dai quali queste proprietà potevano essere dedotte senza calcolare $\hat{f}$?
(iv) Si calcoli la derivata prima f' di f nel senso delle distribuzioni e si dimostri che f' è temperata.
(v) Usando l'espressione trovata per $\hat{f}$, si calcoli la trasformata di Fourier di f'.

Svolgimento. (i) f è sia in $L^1(I\!R)$ che in $L^2(I\!R)$ perché è continua in $[-1, 1]$ e a supporto compatto, ed è quindi Riemann integrabile.
(ii) e (iii) Siccome f è dispari, $\hat{f}$ deve risultare puramente immaginaria e dispari, continua perché $f \in L^1$ e in L^2 perché $f \in L^2$. Si ha

$$\int_0^1 f(t) \sin \omega t \, dt = -\frac{\cos \omega}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} \sin \omega + \frac{2 \cos \omega}{\omega^3} - \frac{2}{\omega^3} = \frac{-\omega^2 \cos \omega + 2\omega \sin \omega + 2(\cos \omega - 1)}{\omega^3}$$

$$= \frac{\omega}{4} + o(\omega) \quad (\omega \to 0),$$

da cui in effetti $\hat{f}$ è continua ed in L^2, e

$$\hat{f}(\omega) = 2i\frac{\omega^2 \cos\omega - 2\omega \sin\omega - 2(\cos\omega - 1)}{\omega^3}.$$

(iv) $f'(x) = 2|x|\chi_{[-1,1]} - \delta(x+1) - \delta(x-1)$.
(v)

$$\hat{f'}(\omega) = 2\frac{-\omega^2 \cos\omega + 2\omega \sin\omega + 2(\cos\omega - 1)}{\omega^2}.$$

3) [7 punti] Si consideri la funzione τ così definita: per ogni $f : I\!R \to I\!R$, τf è la funzione da $(-\pi/2, \pi/2)$ in $I\!R$ definita da $(\tau f)(x) = f(\tan x)$. Si provi che:
(i) se $f \in L^1(I\!R)$ allora $\tau f \in L^1(-\pi/2, \pi/2)$,
(ii) $\tau : L^1(I\!R) \to L^1(-\pi/2, \pi/2)$ è lineare e continua.
Svolgimento. (i)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |(\tau f)(x)| dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f(\tan x)| dx = (y = \tan x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)\frac{1}{1+y^2}| dy \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy < +\infty.$$

(ii) τ è lineare per come è definito: $(\tau(\lambda f_1 + \mu f_2))(x) = \lambda f_1(\tan x) + \mu f_2(\tan x) = \lambda(\tau f_1)(x) + \mu(\tau f_2)(x)$ per ogni x. La continuità di τ si prova con un procedimento simile a quello usato in (i). Per linearità basta provare la continuità in $f = 0$. Se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(y)| dy \to 0$$

allora

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |(\tau f_n)(x)| dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |f_n(\tan x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(y)| \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(y)| dy \to 0.$$

4) [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{z^2}}.$$

Si chiede di
(i) studiarne le singolarità e calcolare i relativi residui, ove possibile;
(ii) scrivere la parte caratteristica della serie di Laurent di f in un intorno di $z = 0$.

Svolgimento. (i) Risolvendo l'equazione $e^{z^2} = 1$ con $z = x + iy$ si ottiene

$$e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \sin 2xy) = 1$$

da cui si ha $x^2 - y^2 = 0$ e $xy = K\pi$ con $K \in \mathbf{Z}$. Quindi si trovano le soluzioni

$$z_k = \pm\sqrt{K\pi}(1 \pm i), K \in \mathbf{Z}, \mathbf{K} \geq \mathbf{0}.$$

Se $K = 0$ allora $z = 0$ è un polo di ordine 2. Infatti:

$$\lim \frac{z^2}{1 - e^{z^2}} = -1 \ (L'Hopital).$$

Se $k \neq 0$, gli z_k sono poli di ordine 1:

$$\lim \frac{z - z_k}{1 - e^{z^2}} = \frac{1}{-2z_k} \ (L'Hopital) = res(f, z_k).$$

Calcoliamo il residuo di f in $z = 0$:

$$res(f, 0) = \lim_{z \to 0}(\frac{z^2}{1 - e^{z^2}})' = \lim \frac{2z(1 - e^{z^2}) + z^2 e^{z^2} 2z}{(1 - e^{z^2})^2} =$$

$$(Taylor) = \lim \frac{z^5 + o(z^5)}{z^4 + o(z^4)} = 0.$$

ii) $c_{-1} = 0 = res(f, 0)$, $c_{-2} = \lim \frac{z^2}{1-e^{z^2}} = -1$. Quindi la parte caratteristica della serie di Laurent è

$$\frac{-1}{z^2}.$$