ANALISI REALE E COMPLESSA

Commissione Colombo, Mannucci

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 11.1.2005

Svolgimento

1) Sia

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s\pi/2})(1 + e^{-s\pi})}{s(1 + s^2)}.$$

(i) Si calcoli l'antitrasformata di Laplace f di F e se ne deduca che $F(s)\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}$ è la trasformata di Laplace di una funzione periodica $\tilde{f}$, da determinarsi;

(ii) sia $g(t)$ la prolungata π-periodica della funzione che vale 1 per $t \in [0, \pi/2]$ e 0 per $t \in (\pi/2, \pi)$: si calcoli la trasformata di Laplace di g;

(iii) usando (i) e (ii) si risolva il problema di Cauchy

$$x''(t) + x(t) = g(t)H(t), \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Soluzione. (i) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+s^2)}\right](t) = H(t)\int_0^t \sin u\, du = H(t)\left(-\cos u|_0^t\right) = (1 - \cos t)H(t)$. Perciò $\mathcal{L}^{-1}[F](t) = (1-\cos t)H(t) - (1-\cos(t-\pi/2))H(t-\pi/2) + (1-\cos(t-\pi))H(t-\pi) - (1-\cos(t-3\pi/2))H(t-3\pi/2)) = H(t) - H(t-\pi/2) + H(t-\pi) - H(t-3\pi/2) - \cos t\chi_{[0,\pi/2]}(t) + (\sin t - \cos t)H(t-\pi/2) + \cos t\chi_{\pi,3\pi/2]}(t) + (\cos t - \sin t)H(t-3\pi/2) =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 - \cos t & \text{per } t \in [0, \pi/2] \\ \sin t - \cos t & \text{per } t \in [\pi/2.\pi] \\ 1 + \sin t & \text{per } t \in [\pi, 3\pi/2] \\ 0 & \text{per } t > 3\pi/2] \end{cases}$$

(disegnare il grafico di f). In particolare, F è la trasformata di Laplace di una funzione nulla fuori dell'intervallo $[0, 2\pi]$. Quindi $F(s)\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}$ è la trasformata della ripetizione $\tilde{f}$ 2π-periodica di f.

(ii) $\mathcal{L}[g] = \frac{1}{1-e^{-\pi s}}\int_0^{\pi/2} e^{-st}\,dt = \frac{1-e^{-s\pi/2}}{s}\,\frac{1}{1-e^{-\pi s}}$.

(iii) Posto $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$, risulta $(s^1+1)X(s) = \frac{1-e^{-s\pi/2}}{s}\,\frac{1}{1-e^{-\pi s}}$, da cui $X(s) = \frac{1-e^{-s\pi/2}}{s(1+s^2)}\,\frac{1}{1-e^{-\pi s}} = \frac{(1-e^{-\pi s/2})(1+e^{-\pi s})}{s(1+s^2)(1-e^{-2\pi s})}$, cioè $X(s) = F(s)\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}$. Quindi $x(t) = \tilde{f}(t)$. Si osservi che $\frac{1-e^{-s\pi/2}}{s(1+s^2)}\,\frac{1}{1-e^{-\pi s}}$, sebbene abbia l'aspetto della trasformata di Laplace di una funzione π-periodica, non lo è, perché l'antitrasformata di $\frac{1-e^{-s\pi/2}}{s(1+s^2)}$ non è nulla fuori di $[0, \pi]$.

2) Sia $f(x) = (|x| - 2)\chi_{[-2,2]}(x)$.

i) Si calcolino la derivata prima f' e la derivata seconda f'' nel senso delle distribuzioni di f;

ii) si calcoli la trasformata di Fourier di f'' e se ne deduca la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di f;

iii) usando la formula di inversione per $\hat{f}$ si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2u) - 1}{u^2} \cos u\, du;$$

iv) (facoltativo) detta $f_n(x) = (|x| - 2)\chi_{[-2-1/n,2+1/n]}(x)$, si dica se
a) f_n converge a f uniformemente in $I\!R$;
b) $\hat{f}_n$ converge a $\hat{f}$ uniformemente in $I\!R$ (non calcolare $\hat{f}_n$).

Soluzione. $f'(x) = -\chi_{[-2,0]}(x) + \chi_{[0,2]}(x)$; $f''(x) = -\delta(x-2) + 2\delta(x) - \delta(x+2)$, da cui

$$\hat{f''}(\omega) = -e^{-2i\omega} + 2 - e^{2i\omega} = 2(1 - \cos 2\omega).$$

Perciò $\hat{f}(\omega) = -\frac{\hat{f''}(\omega)}{\omega^2} = \frac{2(\cos 2\omega - 1)}{\omega^2} \in L^1(I\!R)$. Quindi, per ogni $x \in I\!R$ si ha che

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\frac{2(\cos 2\omega - 1)}{\omega^2}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\cos 2\omega - 1}{\omega^2}\, d\omega.$$

Per $x = 1$ risulta perciò

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\cos 2\omega - 1}{\omega^2}\, d\omega = \pi f(1) = -\pi.$$

(iv) f_n coincide con f per $x \in [-2, 2]$, per $x \leq -2 - 1/n$ e per $x \geq 2 + 1/n$. Perciò

$$\sup_{x \in I\!R} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-2-1/n,-2] \cup [2,2+1/n]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n},$$

per cui f_n converge a f uniformemente in $I\!R$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_n(\omega) - \hat{f}(\omega)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\,(f_n(x) - f(x))\, dx\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&= \int_{-2-1/n}^{-2} |f_n(x) - f(x)|\, dx + \int_{2}^{2+1/n} |f_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leq 2/n^2 \to 0.
\end{aligned}$$

Dunque $\hat{f}_n$ converge a $\hat{f}$ uniformemente in $I\!R$.

3) Si consideri la funzione f così definita: per ogni $x \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $f(x)(\cdot)$ è la funzione

$$t \mapsto \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{s}}\, ds, \qquad t \in [0,1].$$

Si provi che
(i) per ogni $x \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $f(x)(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,1])$;
(ii) $f : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ è lineare e continua (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup).

Svolgimento. (i) Per provare che $f(x)(\cdot)$ è continua: $f(x)(t+h) - f(x)(t) = \int_t^{t+h} x(s)/\sqrt{s}\, ds = \int_0^1 \chi_{[t,t+h]}(s)\, x(s)/\sqrt{s}\, ds$. Siccome $\sqrt{s} \in L^1(0,1)$, per il teorema della convergenza dominata $\lim_{h\to 0}\int_0^1 \chi_{[t,t+h]}(s)\, x(s)/\sqrt{s}\, ds = \int_0^1 0\, ds = 0$, per cui $f(x)(\cdot)$ è continua. Alternativamente:

$$\begin{aligned}
|f(x)(t+h) - f(x)(t)| &\leq \left|\int_t^{t+h} |x(s)|/\sqrt{s}\, ds\right| \\
&\leq \left|\int_t^{t+h} \sup_{u\in[0,1]} |x(u)|/\sqrt{s}\, ds\right| \leq \|x\|_\infty \int_t^{t+h} ds/\sqrt{s} \\
&= \|x\|_\infty\, 2(\sqrt{t+h} - \sqrt{t}) \to 0.
\end{aligned}$$

(ii) La linearità di f segue dalla linearità dell'integrale. Per provare la continuità di f basta perciò provarne la continuità in 0. Sia dunque $x_n \to 0$ uniformemente in $[0,1]$, cioè $\|x_n\|_\infty \to 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} |f(x_n)(t)| &= \left| \int_0^t \frac{x_n(s)}{s}\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 \frac{|x_n(s)|}{\sqrt{s}}\, ds \right| \leq \int_0^1 \frac{\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t)|}{\sqrt{s}}\, ds \\ &= \|x_n\|_\infty \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}} \to 0. \end{aligned}$$

Osservazione: è sbagliato risolvere l'esercizio scrivendo, ad esempio,

$$\int_0^1 \sup_{s\in[0,1]} \left\{ \frac{|x_n(s)|}{\sqrt{s}} \right\} dt \to 0,$$

perché $1/\sqrt{s}$ non è limitata. Bisogna invece usare il fatto che $1/\sqrt{s}$ è sommabile, come si è scritto sopra.

4) [10 punti] **Esercizio del Tema 2.**
Si consideri la funzione $f(z) = \frac{e^{3iz}}{(2z^2+1)^2}$. Si chiede di

(i) trovarne i residui nelle proprie singolarità;

(ii) dire se esiste finito l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(2x^2+1)^2}\, dx$$

e in caso affermativo calcolarlo usando il metodo dei residui.

(iii) Classificare le singolarità di $g(z) = f(z)\, \frac{z-\sqrt{2\pi}}{\cos(z^2)-1}$.

Svolgimento. (i) Le singolarità di f sono i punti $z_{1,2} = \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Esse sono poli di ordine 2, quindi per calcolare il residuo di f in z_i, $i = 1,2$ si usa la formula

$$\mathrm{Res}(f, z_i) = \lim_{z\to z_i} \frac{d}{dz}\big((z-z_i)^2 f(z)\big),\ i = 1,2.$$

Quindi

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\Big(\frac{e^{3iz}}{4(z-z_2)^2}\Big) = \frac{1}{4} \lim_{z\to i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{e^{3iz}(3i(z-z_2)^2 - 2(z-z_2))}{(z-z_2)^4} = -\frac{(3+\sqrt{2})}{8} e^{-3\sqrt{2}/2} i.$$

Analogamente

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to z_2} \frac{d}{dz}\Big(\frac{e^{3iz}}{4(z-z_1)^2}\Big) = \frac{(-3+\sqrt{2})}{8} e^{3\sqrt{2}/2} i$$

Si noti che, in generale, a poli coniugati non corrispondono residui coniugati (ciò avviene invece quando $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$).

(ii) Si ha $\left|\frac{\cos 3x}{(2x^2+1)^2}\right| \leq \left|\frac{1}{(2x^2+1)^2}\right|$ che è integrabile in $I\!R$ perché asintotica a $\frac{1}{4x^4}$ per $|x| \to +\infty$.
Dal teorema dei residui si ha

$$2\pi i\, \mathrm{Res}(f, i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{3ix}}{(2x^2+1)^2}\, dx + \int_{\gamma_R} g(z)\, dz,$$

dove γ è la curva che racchiude il semicerchio di centro 0 e raggio R che sta nel semipiano $Imz > 0$ e γ_R è la semicirconferenza del semipiano superiore. Al secondo integrale a destra si può applicare il lemma di Jordan per $R \to +\infty$. Inoltre si ha che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 3x}{(2x^2+1)^2}\, dx = 0$, perché la funzione $\frac{\sin 3x}{(2x^2+1)^2}$ è dispari. Quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(2x^2+1)^2}\, dx = 2\pi i Res(f, i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{(3+2\sqrt{2})}{2}\pi e^{-3\sqrt{2}/2}$.

(iii) Oltre alle singolarità di f, che sono già state classificate in i), la funzione $f(z)$ presenta singolarità nei punti $z_k = \pm\sqrt{2k\pi}$.

Se $k = 0$, usando lo sviluppo di Taylor per il $\cos(z^2)$ in un intorno di $z = 0$, si ha che il punto $z = 0$ è un polo di ordine 4.

Se $k \neq 0, 1$, gli z_k sono poli di ordine 2. Infatti: $\lim_{z\to z_k}(z - z_k)^2 g(z) = f(z_k)(z_k - \sqrt{2\pi}) \lim_{z\to z_k}(z - z_k)^2 \frac{1}{\cos(z^2)-1}$. Applicando due volte l'Hopital, si ottiene che tale limite esiste finito diverso da zero.

Se $k = 1$, procedendo come sopra, si ottiene che $\lim_{z\to\sqrt{2\pi}}(z - \sqrt{2\pi})g(z)$ esiste finito diverso da zero, quindi $z = \sqrt{2\pi}$ è un polo di ordine 1.

5) (Facoltativo) Si calcoli la distribuzione

$$T_n(x) = x^n \delta^{(n-1)}(x)$$

al variare di $n = 1, 2, \ldots$ ($\delta^{(k)}$ indica la derivata k-esima della δ di Dirac).

Svolgimento. Per induzione su $n = 1, 2, \ldots$ Per $n = 1$ risulta $x\delta(x) = 0$, come ben noto. Supponiamo che sia $x^n\delta^{(n-1)}(x) = 0$ e proviamo che $x^{n+1}\delta^{(n)}(x) = 0$. Si ha, per ogni $v \in \mathcal{D}(I\!R)$:

$$\begin{aligned}\langle x^{n+1}\delta^n(x), v(x)\rangle &= \langle \delta^{(n)}(x), x^{n+1}v(x)\rangle \\ &= -\langle \delta^{(n-1)}(x), (n+1)x^n v(x) + x^{n+1}v'(x)\rangle \\ &= -\langle x^n\delta^{(n-1)}, (n+1)v(x) + xv'(x)\rangle = 0.\end{aligned}$$

Perciò $T_n = 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$

Tempo: due ore e mezza. È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.