ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 20.9.2005

1) [8 punti] Si provi che la funzione

$$f(x,y) = \arctan(x^2 y)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$ e si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy$.

2) [8 punti] Si consideri la funzione $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per} \quad -1 \le x \le 0, \\ x/2 & \text{per} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$$

a. Si calcolino i coefficienti di Fourier di f;

b. si studino la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier di f in $\mathbb{R}$;

c. se ne deduca la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

3) [8 punti] Sia

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2+1)}.$$

a. Si dimostri che $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$;

b. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x)$.

4) [8 punti] Sia $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}, n > 0$ la successione di funzioni così definita

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } 1/n \le |x| \le n, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{per } x \ne 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Stabilire se la successione f_n converge a f

1) puntualmente, uniformemente in $\mathbb{R}$;
2) in $L^1(\mathbb{R})$, in $L^2(\mathbb{R})$;
3) in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Tempo: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.