ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

SVOLGIMENTO DEL TEMA 1 – 13.12.2005

1) [8 punti] Sia $f(z) = 1/(z^3+1)$ e indichiamo con C_R la curva $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{2}{3}\pi]$; siano poi $\alpha_R(t) = t$, $t \in [0, R]$ e $\beta_R(t) = e^{\frac{2}{3}\pi i}t$, $t \in [0, R]$ e si ponga $\Gamma_R = \alpha_R + C_R - \beta_R$ (cioè Γ_R è il circuito orientato positivamente ottenuto congiungendo con l'origine in linea retta gli estremi della curva C_R).

(i) Determinare le singolarità di f all'interno di Γ_R, $R > 1$, e calcolare i relativi residui;

(ii) usando lemmi noti, mostrare che $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$;

(iii) calcolare l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$$

integrando f sul circuito Γ_R e utilizzando il metodo dei residui [semplificare bene il risultato, che necessariamente è un numero reale].

Svolgimento. f ha poli di ordine 1 in $-1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}$. All'interno del circuito appartiene solo $e^{i\pi/3}$ e $\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/3}) = \frac{1}{3e^{2i\pi/3}}$. Per il teorema dei residui,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \frac{2\pi i}{3e^{2i\pi/3}}.$$

Per il lemma del cerchio grande, $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$. Inoltre,

$$\int_{\alpha_R} f(z)\, dz + \int_{\beta_R} f(z)\, dz = (1 - e^{2i\pi/3}) \int_0^R \frac{1}{x^3+1}\, dx,$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\, dx = \frac{2\pi i}{3e^{2i\pi/3}(1 - e^{2i\pi/3})} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2) [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{per } 1 \le x < \pi. \\ 0 & \text{per } x = \pi. \end{cases}$$

(i) Si calcolino i coefficienti di Fourier della prolungata 2π-periodica dispari $\tilde{f}$ di f;

(ii) si dica se la serie di Fourier di $\tilde{f}$ converge a $\tilde{f}$ in $L^2(-\pi, \pi)$, uniformemente in $\mathbb{R}$, puntualmente in $\mathbb{R}$;

(iii) si deduca il valore della somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} - \frac{(-1)^n \sin n}{n}.$$

Svolgimento. $a_k = 0$ per disparità, mentre

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^1 x \sin kx\, dx + \int_1^{\pi} \sin kx\, dx\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin k}{k^2} - \frac{(-1)^k}{k}\right),$$

cioè

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k^2} - \frac{(-1)^k}{k} \right) \sin kx.$$

Siccome $f \in L^2(-\pi,\pi)$, la serie di Fourier di f converge a f in $L^2(-\pi,\pi)$, mentre non converge uniformemente in $\mathbb{R}$, perché la prolungata di f non è continua. Infine, per il criterio di Dini, converge a f puntualmente in tutto $\mathbb{R}$. In particolare, per $x = 1$ converge a $f(1) = 1$, per cui

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2 k}{k^2} - \frac{(-1)^k \sin k}{k} \right).$$

3) [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |\sin x| & \text{per} \quad -\pi \le x \le \pi, \\ 0 & \text{per} \quad |x| > \pi, \end{cases}$$

(i) si calcolino la derivata prima f' e la derivata seconda f'' di f nel senso delle distribuzioni;

(ii) si esprima f'' in termini di f

(iii) mediante ii) si calcoli la trasformata di Fourier di f'' (esprimendola in funzione di $\hat{f}$) e se ne deduca il valore di $\hat{f}$;

(iv) si provi che $\hat{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e che $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$; si dica se ciò poteva essere dedotto dalle proprietà di f; si provi infine che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$;

(v) si deduca dall'espressione di $\hat{f}$ il valore dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega\pi/2)\, d\omega;$$

(vi) (facoltativo) si risponda alla domanda (i) relativamente alla funzione $g(x) = |\sin x|$; si dica se g'' è una distribuzione temperata.

Svolgimento. (i), (ii). La derivata nel senso delle distribuzioni di f è (la distribuzione associata alla funzione $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ definita ponendo) $f'(x) = \text{sign}(x) \cos x\, \chi_{(-\pi,\pi)}(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$. La derivata seconda è la distribuzione

$$f'' = -|\sin x|\chi_{(-\pi,\pi)}(x) + \delta(x-\pi) + 2\delta(x) + \delta(x+\pi) = -f(x) + \delta(x-\pi) + 2\delta(x) + \delta(x+\pi),$$

da cui

$$-\omega^2 \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f''](\omega) = -\hat{f}(\omega) + e^{i\pi\omega} + e^{-i\pi\omega} + 2.$$

Quindi [(iii), (iv)]

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2(\cos \pi\omega + 1)}{1 - \omega^2},$$

che è pari (come era da aspettarsi, dato che f è reale e pari) e continua (come era da aspettarsi, dato che $f \in L^1(\mathbb{R})$: $\hat{f}$ ha singolarità eliminabili in ± 1). È anche in $L^2(\mathbb{R})$ (come era da aspettarsi perché $f \in L^2(\mathbb{R})$) perché è continua ed infinitesima di ordine 2 per $|\omega| \to +\infty$. Per la stessa ragione è anche in $L^1(\mathbb{R})$.
(v). Dalla formula di inversione si ricava

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos(\omega\pi)}{1 - \omega^2} \cos(\omega\pi/2)\, d\omega = \pi.$$

(vi). Si ha

$$g' \text{ è la prolungata } 2\pi\text{-periodica di } \text{sign}(x) \cos x,$$

da cui

$$g'' = -f(x) + 2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\pi).$$

Per provare che g'' è una distribuzione temperata, osserviamo che essa è somma di due termini, il primo dei quali, $-f$, è una distribuzione temperata, dato che $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Per provare che la somma della serie è una distribuzione temperata, sia $\{v_n\}$ una successione di funzioni convergente a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che se $n \geq n_\varepsilon$ allora $|v_n(x)| \leq \varepsilon/(1+x^2)$. Quindi, se $n \geq n_\varepsilon$,

$$\Big\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\pi), v_n(x) \Big\rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_n(k\pi) \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon/(1 + k^2\pi^2) \leq \mathrm{cost}\, \varepsilon,$$

che prova la convergenza a zero di $\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\pi), v_n(x) \rangle$.

4) [8 punti] Si consideri la funzione F così definita: per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $F(u)(\cdot)$ è la funzione

$$x \mapsto \int_0^x \sin(x - t) u(t)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Si provi che

(i) per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $F(u)(\cdot) \in \mathcal{C}^0([0,1])$;

(ii) $F : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ è lineare e continua (in $\mathcal{C}^0([0,1])$ si consideri la norma del sup).

Svolgimento. (i) Sia $x_n \to x$. Allora

$$\begin{aligned}
|F(u)(x_n) - F(u)(x)| &= \left| \int_0^{x_n} (\sin(x_n - t) - \sin(x - t)) u(t)\, dt + \int_x^{x_n} \sin(x - t) u(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |\sin(x_n - t) - \sin(x - t) u(t)|\, dt + \left| \int_x^{x_n} |\sin(x - t) u(t)|\, dt \right| \\
&\leq \|u\|_\infty \left(\int_0^1 |\sin(x_n - t) - \sin(x - t)|\, dt + \left| \int_x^{x_n} |\sin(x - t)|\, dt \right| \right) \\
&\leq \|u\|_\infty \left(\int_0^1 |\sin(x_n - t) - \sin(x - t)|\, dt + |x_n - x| \right).
\end{aligned}$$

Il primo addendo tende a zero per (ad esempio) convergenza dominata; il secondo tende visibilmente a zero.

(ii) Sia $\{u_n\}$ una successione che tende a zero in $\mathcal{C}^0([0,1])$. Si ha

$$\|F(u_n)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \sin(x - t)\, u_n(t)\, dt \right| \leq \int_0^1 |u_n(t)|\, dt \leq \|u_n\|_\infty \to 0.$$