ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Quarto appello – 22.09.2006

1) [8 punti] Si provi che per ogni $\alpha > \frac{3}{2}$ la funzione

$$f(x,y) = \frac{x \sin y}{1 + (x^2 + y^2)^\alpha}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$ e si calcoli $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy$.

2) [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = (\pi - 2|x|)\chi_{[-\pi,\pi]}(x),$$

(a) si calcoli la derivata nel senso delle distribuzioni di f;
(b) si calcolino i coefficienti di Fourier di f in $[-\pi, \pi]$;
(c) si studi la convergenza in $L^2(-\pi, \pi)$ e puntuale ed uniforme in $\mathbb{R}$ della serie di Fourier di f.

3) [8 punti] Si considerino, al variare di $k \in \mathbb{N}$, le funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x = 0 \\ \frac{\sin kx}{kx} & \text{per} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Si provi che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in L^1(-1,1)$, la funzione $f_k(\cdot)u(\cdot)$ appartiene a $L^1(-1,1)$;
(b) si provi che, per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $u \in L^1(-1,1)$, la funzione

$$T_k u : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad T_k u(x) = \int_{-1}^{x} f_k(t)u(t)\,dt$$

è continua e perciò sommabile in $[-1,1]$;
(c) si provi che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, il funzionale

$$T_k : L^1(-1,1) \to L^1(-1,1)$$

è lineare e continuo;
(d) per ogni $u \in L^1(-1,1)$ si calcoli il limite in $L^1(-1,1)$ (per $k \to \infty$) di $T_k u$.

4) [8 punti] a) Si studino le singolarità di

$$g(z) = \frac{1}{z^4 + z^2 + 1}.$$

b) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si calcoli la trasformata di Fourier di f.

Tempo: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.