# ANALISI REALE E COMPLESSA

**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

## SVOLGIMENTO del TEMA 1 – 9.1.2006

1) [8 punti] Si dica se la funzione

$$f(x,y) = \frac{xe^{-|y|\sqrt{|x|}}}{1+x^2}$$

è sommabile in $\mathbb{R}^2$; in caso positivo si calcoli l'integrale

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy.$$

**Svolgimento** Applichiamo il teorema di Tonelli a $|f|$. Integrando nella variabile $y$ si ottiene

$$\frac{|x|}{1+x^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|\sqrt{|x|}}dy = 2\frac{|x|}{1+x^2}\int_0^{+\infty} e^{-y\sqrt{|x|}}dy = \frac{|x|}{1+x^2}\frac{2}{\sqrt{|x|}}.$$

Integrando ora in $x$ la funzione sopra ottenuta:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+x^2}\frac{2}{\sqrt{|x|}}dx = 2\int_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2}dx.$$

L'ultimo integrale esiste finito perché $\frac{\sqrt{|x|}}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$ per $|x| \to +\infty$. Quindi $|f|$ è sommabile e allora $f$ è sommabile. Per calcolarlo, si può applicare il teorema di Fubini:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx)dy = 0,$$

perché $f$ è una funzione dispari nella variabile $x$.

2) [8 punti]

(i) Determinare singolarità e residui nei poli di

$$h(z) = \frac{e^{-iz\omega}}{z^3+1}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

(ii) Calcolare, al variare di $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^3+1}\,dx.$$

(iii) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^3+1}.$$

Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si deduca da (ii), applicando formalmente opportune regole di trasformazione, la trasformata di Fourier di $f$.

(iv) (facoltativo) Provare che $g_1(x) = \text{v.p.}\,\frac{1}{x+1}$ induce una distribuzione temperata su $\mathbb{R}$ e dedurne che $g_2(x) = \text{v.p.}\,\frac{1}{x^3+1}$ induce una distribuzione temperata.

**Svolgimento** i) Le singolarità di $h(z)$ sono le soluzioni dell'equazione $z^3+1=0$ e cioè $z_0 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1/2 - i\sqrt{3}/2$. Essi sono poli semplici.

$Res(h,z_0) = \frac{e^{\omega\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3}e^{(-\omega/2-2/3\pi)i}$, $Res(h,z_1) = \frac{e^{i\omega}}{3}$, $Res(h,z_2) = \frac{e^{-\omega\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3}e^{(-\omega/2-10/3\pi)i}$.

ii) Per $\omega < 0$ si considera una semicirconferenza, nel semipiano superiore, di raggio $R$ e centro l'origine, ed una semicirconferenza di raggio $r$ e centro $z = -1$ e si considera il circuito corrispondente ottenuto collegando gli estremi delle due semicirconferenze con opportuni segmenti sull'asse $x$. Se $R \to +\infty$ e $r \to 0$ usando il lemma di Jordan e il lemma del cerchio piccolo si ottiene

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^3+1}\, dx = 2\pi i Res(h, z_0) + \pi i Res(h, z_1).$$

Analogamente per $\omega > 0$ si considera una semicirconferenza, nel semipiano inferiore, di raggio $R$ e centro l'origine, ed una semicirconferenza di raggio $r$ e centro $z = -1$ sempre nel semipiano inferiore e si considera il circuito corrispondente. In questo caso

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^3+1}\, dx = -2\pi i Res(h, z_2) - \pi i Res(h, z_1).$$

Per $\omega = 0$ si procede analogamente usando il lemma del cerchio grande invece del Lemma di Jordan.

iii) $f \in L^1(\mathbb{R})$: $|f| \leq \frac{1}{x^3+1}$, quindi per $|x| \to +\infty$ è sommabile. Inoltre si ha che $\lim_{x\to -1} f(x) = C$ quindi la funzione è limitata in un intorno di $x = -1$ e quindi sommabile. Si ha $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x^3+1} = \frac{e^{\pi x i} - e^{-\pi x i}}{2i(x^3+1)}$, quindi $\hat{f} = \frac{\hat{g}(\omega-\pi) - \hat{g}(\omega+\pi)}{2i}$, dove $g(x) = \frac{1}{x^3+1}$ e la sua trasformata di Fourier sono state calcolate in ii).

(iv) (facoltativo) Proviamo che $l(x) = \text{v.p.}\frac{1}{x}$ induce una distribuzione temperata su $\mathbb{R}$: dobbiamo dimostrare che $< l, v_k > \to 0$ se $v_k \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, spazio delle funzioni a decrescenza rapida.

$$< \text{v.p.}\frac{1}{x}, v_k >= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,+\epsilon]} \frac{v_k(x)}{x} dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,+\epsilon]} \frac{v_k(x) - v_k(0)}{x} dx =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{v_k(x) - v_k(0)}{x} dx$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\frac{v_k(x)-v_k(0)}{x}$ è limitato su $\mathbb{R}$ perché $v_k'$ esiste finito su $\mathbb{R}$.
A questo punto scriviamo
$\int_{\mathbb{R}} \frac{v_k(x)-v_k(0)}{x} dx = \int_{-1}^{1} \frac{v_k(x)-v_k(0)}{x} dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{v_k(x)-v_k(0)}{x} dx.$
Poiché, per ipotesi, la successione converge a zero uniformemente su $\mathbb{R}$ e la successione $v_k(x)(1 + x^2)$ è sommabile su $\mathbb{R}$, si può passare al limite sotto il segno di integrale:
$\lim_{k\to+\infty} < \text{v.p.}\frac{1}{x}, v_k >= \lim_{k\to+\infty} \int_{-1}^{1} \frac{v_k(x)-v_k(0)}{x} dx + \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{v_k(x)-v_k(0)}{x} dx.$
Il primo addendo tende a zero per la convergenza uniforme della successione $v_k$, il secondo per il teorema della convergenza dominata.

Con il cambio di variabile $x + 1 = y$ si ottiene che v.p. $\frac{1}{x+1}$ induce una distribuzione temperata su $\mathbb{R}$. Inoltre $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2-x)}$ e attraverso la scomposizione in fratti semplici e tenendo conto che $\frac{1}{1+x^2-x}$ non ha singolarità reali, si ottiene che anche v.p. $\frac{1}{x^3+1}$ induce una distribuzione temperata su $\mathbb{R}$.

3) [8 punti] Si risolva con il metodo della separazione delle variabili il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & t > 0,\ x \in [0,1] \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u_x(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \cos^2(3\pi x), & x \in [0,1]. \end{cases}$$

**Svolgimento** Si cerca la soluzione della forma $u(x,t) = X(x)T(t)$: $T'X = X''T$ e quindi deve essere $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = K$, $K$ costante.
Quindi risolviamo $X'' - KX = 0$.
Perché siano verificate le condizioni al contorno, dovrà essere $K \leq 0$, cioè $K = -\omega^2$.
Quindi la soluzione $X$ sarà della forma $X(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$.
Imponendo la condizione su $x = 0$ si ottiene $u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$, quindi $X'(0) = 0$.

$$X'(x) = -\alpha\omega \sin \omega x + \beta\omega \cos \omega x.$$

$X'(0) = \beta\omega = 0$ e quindi si prende $\beta = 0$ cioè $X(x) = \alpha \cos \omega x$.
Analogamente, dalla condizione su $x = 1$ si ricava $X'(1) = -\alpha\omega \sin \omega = 0$, da cui, non potendo essere $\alpha = 0$ si ricava $\omega = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Quindi si ottiene $X(x) = \alpha \cos n\pi x$.
Risolvendo l'equazione per $T$ con $K = -n^2\pi^2$, si ottiene $T(t) = Ce^{-n^2\pi^2 t}$.
Quindi, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, la funzione $u_n(x,t) = C_n e^{-n^2\pi^2 t} \cos n\pi x$ risolve il problema di Cauchy (tranne la condizione iniziale). Vediamo se è possibile scrivere il dato iniziale come combinazione lineare di $u_n(x,0) = C_n \cos n\pi x$ per qualche $n$.
$u(x,0) = \cos^2 3\pi x = \frac{1}{2}(1 + \cos 6\pi x)$.
Quindi abbiamo $u(x,t) = C_0 + C_6 e^{-36\pi^2 t} \cos 6\pi x$. A questo punto prendendo $C_0 = 1/2$ e $C_6 = 1/2$ si ottiene la soluzione del nostro problema di Cauchy.
4) [8 punti] Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{per} \quad 0 < |x| \le n \\ 1 & \text{per} \quad x = 0 \\ 0 & \quad\quad\ \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Si calcoli il limite puntuale $f$ di $f_n$ e si dica se la convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$ oppure negli intervalli del tipo $[-r, r]$, $r \in \mathbb{R}$;

(ii) si dica se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ oppure $f \in L^1(\mathbb{R})$;

(iii) si dica se $f_n$ converge a $f$ in $L^1(\mathbb{R})$ oppure in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

**Svolgimento** i) Il limite puntuale di $f_n(x)$ è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{per} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{per} \quad x = 0. \end{cases}$$

La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$, infatti $\sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| = +\infty$, invece è uniforme su $[-r, +r]$, infatti si ha che $\sup_{[-r,+r]} |f_n - f| = 0$ per ogni $n > r$ e quindi $\lim_n \sup_{[-r,+r]} |f_n - f| = 0$.
ii) $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ infatti in ogni intervallo $(a, b)$ la $f(x)$ è misurabile (perché continua) e limitata e quindi sommabile. $f \notin L^1(\mathbb{R})$ perchè $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
iii) $f_n$ non converge a $f$ in $L^1(\mathbb{R})$ perchè altrimenti $f$ apparterrebbe a $L^1(\mathbb{R})$.
Invece converge a $f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: prendiamo $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathcal{D}$ spazio delle funzioni test; scegliendo $n$ sufficientemente grande tale che *supp* $v \subset [-n, +n]$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)||v(x)|dx = \int_{-r}^{+r} |f_n(x) - f(x)||v(x)|dx \le \sup_{[-r,+r]} |f_n - f| \int_{-r}^{+r} |v(x)|dx = \sup_{[-r,+r]} |f_n - f| K,$$

e l'ultimo termine tende a zero per i).