ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello Straordinario – 13.07.2006

1) [8 punti] Sia $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+4}$.

(i) Dimostrare che $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$;

(ii) calcolare la trasformata di Fourier di f;

(iii) dimostrare che $g(x) := xf(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e calcolare la trasformata di Fourier di g; dedurne che $g \notin L^1(\mathbb{R})$.

2) [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per} \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 0 & \text{per} \quad 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

(i) Si calcolino i coefficienti di Fourier della prolungata 2-periodica dispari $\tilde{f}$ di f;

(ii) si dica se la serie di Fourier di $\tilde{f}$ converge a f in $L^2(-1,1)$, in $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, in $L^1(\mathbb{R})$;

(iii) si deduca il valore della somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

3) [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{\sqrt[4]{|x|}}.$$

(i) si provi che, per ogni $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $fv \in L^1(\mathbb{R})$;

(ii) si provi che il funzionale

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \langle T_f, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)v(x)\,dx$$

è una distribuzione temperata.

(iii) Si determini per quali $p \ge 1$ la funzione f^p appartiene a $L^1(\mathbb{R})$;

4) [8 punti]

(i) Determinare lo sviluppo di Laurent di $\frac{3}{1-z}$ rispettivamente in $|z| < 1$ e $|z| > 1$;

(ii) determinare lo sviluppo di Laurent di

$$f(z) = \frac{1}{2-z} + \frac{3}{1-z}$$

nell'anello $1 < |z| < 2$

(iii) classificare le singolarità di

$$g(z) = f(z)\frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{e^{z-1}}.$$

Tempo: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.