ANALISI REALE E COMPLESSA

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Terzo appello – 8.09.2006

1) [8 punti] Sia f_n la successione definita da

$$f_n(t) = \chi_{P_n}(t), \qquad P_n = [2, 2 + \frac{1}{2^2}] \cup [3, 3 + \frac{1}{3^2}] \cup \ldots \cup [n, n + \frac{1}{n^2}],\ n \geq 2.$$

1. Disegnare il grafico di f_n (ricordare che $\chi_A(\cdot)$ indica la funzione caratteristica di un insieme A);
2. studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione f_n;
3. usando opportuni teoremi, mostrare che la successione f_n converge in $L^1(\mathbb{R})$ e determinare tale limite.

2) [8 punti] Sia $f(x) = (1 - x^2)\chi_{[-1,1]}(x)$.

1. Determinare la trasformata di Fourier di f e discuterne le eventuali proprietà di continuità e di simmetria;
2. dedurre il valore dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^3} \cos \frac{\xi}{2} d\xi.$$

3) [8 punti] Risolvere il problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), & t > 0,\ x \in (0, 4\pi) \\ u(0,t) = u(4\pi, t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin(3x) - 4\sin(5x), & x \in [0, 4\pi]. \end{cases}$$

usando il metodo della separazione delle variabili.

4) [8 punti] Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)},$$

(i) si studino le singolarità di f e si calcolino i residui per quelle con parte immaginaria ≥ 0;

(ii) si provi che f è sommabile in $\mathbb{R}$ e si calcoli l'integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\, dx;$$

(iii) si studino le singolarità di $g(z) = f(z)/\sin(\frac{\pi}{z^2})$.

Tempo: due ore e mezza.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.
Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.
È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.