MATEMATICA A

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta – 9.12.2003 – a.a. **782°**

TEMA 1 - P

1) [10 punti] Studiare la funzione

$$f(x) = \arccos \left| x^2 - 3x + 2 \right|$$

(determinare il dominio D; studiare la continuità e la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile e calcolare i limiti di f' per x che tende agli estremi del suo dominio; **non è richiesto lo studio della derivata seconda**; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f).

2) [10 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-3}\ \arctan \frac{1}{x^{2\alpha}}}.$$

a) Si calcoli una primitiva di f nel caso $\alpha = 0$.
b) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che f è infinitesima per $x \to +\infty$ e, per tali α, si calcoli l'ordine di infinitesimo di f per $x \to +\infty$.
c) Si determinino tutti gli $\alpha \geq 0$ tali che $\int_4^{+\infty} f(x)\, dx$ risulti convergente.
d) Lo si calcoli, se possibile, nel caso $\alpha = 0$.

3) [6 punti] Date l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \tag{1}$$

e la funzione $\varphi(x) = ax^2 e^{-x}$ $(a \in \mathbb{R})$,

a) si determini a in modo che φ sia soluzione di (1);
b) si determini la soluzione che soddisfa le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

4) [4 punti] Si determini il dominio della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(|z| - i)(z^2 - 2z + 5)}.$$

5) **Facoltativo, da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi.** Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ che soddisfa l'equazione:

$$u(x) = \pi + \int_0^x t \cos(u(t))\, dt.$$

Si calcoli $u'(0)$.

Tempo: due ore e mezza.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.