MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 1

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x-1|}{x}\right) - 2x$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 + 2(3+6i)z^2 + 5 + 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{2}\log x + 2)}\, dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 2

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = x - \log\left(\frac{|x-1|}{x}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 + 2(3-6i)z^2 + 5 - 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{3}\log x + 3)}\,dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 3

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x|}{x+1}\right) - 2x$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 - 2(3+6i)z^2 + 5 + 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{5}\log x + 5)}\,dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 4

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = x - \log\left(\frac{|x|}{x+1}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 - 2(3-6i)z^2 + 5 - 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{6}\log x + 6)}\,dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

Soluzioni

1) La funzione è definita per $\dfrac{|x-1|}{x} > 0$, $x \neq 0$, quindi il dominio D è

$$D = \{x > 0, x \neq 1\}.$$

Limiti finiti e infiniti:
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) + 2x = 0$.
Quindi la retta $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
La funzione è continua e derivabile nel suo dominio di definizione perché somma, quoziente e composizione di funzioni continue e derivabili.
$f'(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x(x-1)}$ se $x > 1$,
$f'(x) = \frac{-1+2x^2-2x}{x(1-x)}$ se $x < 1$
quindi

$$f'(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x(x-1)}, \ \forall x \in D.$$

Studiando il segno di $1-2x^2+2x$, si ottiene che f è strettamente decrescente in $(0,1)$ e in $(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, strettamente crescente in $(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$. Ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ mentre non esistono punti di massimo e minimo assoluto in quanto $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.
La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}, \ \forall x \in D.$$

Quindi f è concava se $x > 1$ e se $x \in (1/2, 1)$ mentre è convessa in $(0, 1/2)$ e ha un punto di flesso in $x = 1/2$.

2) Ponendo $w = z^2$, si ha un'equazione di secondo grado. La formula ridotta dà

$$w = -3 - 6i \pm \sqrt{(3+6i)^2 - 5 - 12i} = -3 - 6i \pm \sqrt{-32 + 24i}. \tag{1}$$

Per trovare le radici, si risolve l'equazione $(x+iy)^2 = -32 + 24i$, $x, y \in \mathbb{R}$, da cui

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -32 \\ 2xy = 24, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^4 + 32x^2 - 144 = 0 \\ y = 12/x. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione biquadratica si ottiene $x^2 = -16 \pm 20$, di cui solo la soluzione positiva è accettabile. In definitiva, le due radici nella (**??**) sono $\pm(2+6i)$. Sostituendo, otteniamo le due equazioni $z^2 = -1$ e $z^2 = -5 - 12i$. Le soluzioni della prima sono evidentemente $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Per risolvere la seconda, si imposta un sistema analogo a quello precedente:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \\ y = -6/x. \end{cases}$$

Come prima, la biquadratica ha solo due soluzioni reali, $x = \pm 2$; corrispondentemente, $y = \mp 3$. Concludendo, otteniamo le soluzioni $z_3 = 2 - 3i$ e $z_4 = -2 + 3i$. La rappresentazione nel piano di Gauss consiste nell'insieme dei quattro punti di coordinate $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2,-3)$, $(-2,3)$.

3) (i) La funzione integranda $f(x) = \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x+2\sqrt{2}\log x+2)}$ è definita, positiva e continua su tutto l'intervallo $[1,+\infty[$. L'integrale quindi converge se e solo se f è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+\infty$. Poichè nell'intorno di $+\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^{3(1-\alpha)}}{x^{2-\alpha}\log^2 x} = \frac{1}{x^{2-\alpha-3+3\alpha}\log^2 x} = \frac{1}{x^{2\alpha-1}\log^2 x},$$

dal criterio di confronto asintotico con la funzione $f(x) = \frac{1}{x^a \log^b x}$ dove $a = 2\alpha - 1$ e $b = 2$, segue che l'integrale converge se e solo se $2\alpha - 1 \geq 1$, cioè per $\alpha \geq 1$.

(ii) Per $\alpha = 1$, l'integrale di f tra 1 e x (con $x > 1$), diventa

$$\int_1^x \frac{1}{t(\log^2 t + 2\sqrt{2}\log t + 2)}\,dt = \int_0^{\log x} \frac{1}{(y+\sqrt{2})^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y+\sqrt{2}}\right]_0^{\log x} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\log x + \sqrt{2}},$$

dove la prima uguaglianza si ottiene operando la sostituzione $y = \log t$. Passando al limite per $x \to +\infty$, risulta infine

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(\log^2 t + 2\sqrt{2}\log t + 2)}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t(\log^2 t + 2\sqrt{2}\log t + 2)}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$