Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. P. Mannucci e M. Motta

Parte A di **Matematica G**

Vicenza, 20 giugno 2007

RISOLUZIONE TEMA 1

Esercizio 1

Data la 1-forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y,z) = (2x\cos y + z\sin y)\ dx + \big(xz\cos y - x^2\sin y\big)\ dy + x\sin y\, dz,$$

(i) determinare il dominio di ω e verificare che la forma differenziale ω è chiusa in esso.
(ii) Dimostrare che ω è esatta nel suo dominio e determinare una primitiva f di ω.
(iii) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva definita implicitamente da $x^2+y^2+z^2=4$, $x=y$ e $z\geq 0$, percorsa nel verso delle x decrescenti.

Sol. (i) Il dominio è tutto $\mathbb{R}^3$, insieme convesso e ω è chiusa perchè

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y + z\sin y) = -2x\sin y + z\cos y = \frac{\partial}{\partial x}\big(xz\cos y - x^2\sin y\big),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2x\cos y + z\sin y) = \sin y = \frac{\partial}{\partial x}(x\sin y),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(xz\cos y - x^2\sin y\big) = x\cos y = \frac{\partial}{\partial y}(x\sin y).$$

(ii) Poichè il dominio è convesso e ω è chiusa, ω è anche esatta per un noto Teorema. Per calcolare una primitiva, osserviamo che

$$f(x,y,z) = \int_\gamma \omega,$$

dove γ è per esempio la spezzata ottenuta partendo dall'origine con un segmento parallelo all'asse x fino a $P_0=(x,0,0)$, percorrendo poi il segmento da P_0 a $P_1=(x,y,0)$ (parallelo all'asse y) e infine il segmento da P_1 a $P_2=(x,y,z)$.

Si ottiene

$$f(x,y,z) = \int_0^x 2t\,dt + \int_0^y (-x^2\sin t)\,dt + \int_0^z x\sin y\,dt =$$
$$= x^2 + x^2\cos y - x^2 + xz\sin y = x^2\cos y + xz\sin y.$$

Quindi una primitiva generica è

$$f(x,y,z) = x^2\cos y + xz\sin y + cost.$$

(iii) γ (fare il disegno) è la semicirconferenza che si ottiene intersecando la sfera $x^2+y^2+z^2=4$ con il piano $x=y$ e prendendo solo la parte con $z\geq 0$. Quindi non è una curva chiusa, ma per un noto teorema sulle forme differenziali esatte, basta determinare gli estremi del suo sostegno, che sono $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ e $(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$, e calcolare

$$\int_\gamma \omega = f(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0) - f(\sqrt{2},\sqrt{2},0) = 2\cos\sqrt{2} - 2\cos\sqrt{2} = 0.$$

Esercizio 2

Disegnare e calcolare il volume del solido di rotazione dato da

$$S = \{(x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4, \ x^2 + y^2 - z^2 \le 1\} .$$

Sol. (fare disegno) Il solido si ottiene ruotando intorno all'asse z metà della figura piana E nel piano xz che si ottiene prendendo i punti interni della circonferenza di raggio 2 e centro l'origine che stanno tra i due rami d'iperbole con asse l'asse x e vertici i punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Prendiamo come metà quella con $x > 0$, siccome è simmetrica anche rispetto all'asse x calcoliamo il volume del solido ottenuto dalla rotazione della figura piana E_1 che sta nel primo quadrante e poi moltiplicheremo per 2.

Possiamo usare la formula di Guldino.

$$Vol(S) = 2\pi \int\int_E x \, dxdz = 4\pi \int\int_{E_1} x \, dxdz$$

La figura piana E_1 si decompone nell'unione di due domini normali per esempio rispetto all'asse z.

$$E_1 = A \cup B = \{(x, z) : 0 \le z \le \sqrt{\frac{3}{2}}, 0 \le x \le \sqrt{1 + z^2}\} \cup \{(x, z) : \sqrt{\frac{3}{2}} \le z \le 2, 0 \le x \le \sqrt{4 - z^2}\}.$$

$$\int\int_A x \, dxdz = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} dz \int_0^{\sqrt{1+z^2}} x \, dx = \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{2}(1 + z^2) \, dz = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

$$\int\int_B x \, dxdz = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^2 \frac{1}{2}(4 - z^2) \, dz = \frac{8}{3} - \frac{7}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Quindi in totale

$$Vol(S) = 4\pi \int\int_{E_1} x \, dxdz = 4\pi \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{8}{3} - \frac{7}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \right) = 4\pi \left(\frac{8}{3} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right).$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_S \frac{x^2 + y^2}{z^3} d\sigma,$$

dove S è la superficie definita da

$$S = \{(x, y, z) : x(u, v) = \sin(uv), y(u, v) = \cos(uv), z = u, (u, v) \in D\} ,$$

e

$$D = \left\{ (u, v) : \frac{1}{2} < u < v, v < 1 \right\} .$$

Sol. Poiché la superficie è scritta già in forma parametrica usiamo la definizione di integrale di superficie. Dobbiamo calcolare l'elemento d'area:

$$\|\phi_u \wedge \phi_u\|^2 = \sin^2(uv)u^2 + \cos^2(uv)u^2 = u^2.$$

Il dominio D è un triangolo nel primo quadrante che si può scrivere in forma normale:

$$D = \left\{ (u, v) : \frac{1}{2} < v < 1, 1/2 < u < v \right\}.$$

Quindi

$$\int_S \frac{x^2 + y^2}{z^3} d\sigma = \int_{1/2}^{1} dv \int_{1/2}^{v} \frac{1}{u^3} u du = \int_{1/2}^{1} \left(2 - \frac{1}{v} \right) dv = 1 - \log(2).$$

TEMA 2

Esercizio 1

Data la 1-forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x, y, z) = y \sin z \, dx + (2y \cos z + x \sin z) \; dy + \left(xy \cos z - y^2 \sin z \right) \; dz,$$

(i) determinare il dominio di ω e verificare che la forma differenziale ω è chiusa in esso.
(ii) Dimostrare che ω è esatta nel suo dominio e determinare una primitiva f di ω.
(iii) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva definita implicitamente da $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x = y$ e $z \geq 0$, percorsa nel verso delle x crescenti.
Risultati ii)Primitive: $f(x, y, z) = xy \sin z + y^2 \cos z + C$
iii) curva passante da $P_1 = (3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2, 0)$ e $P_0 = (-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2, 0)$.
$\int_\gamma \omega = f(P_1) - f(P_0) = 0$

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma \frac{x^2 + y^2}{z^4} d\sigma,$$

dove Σ è la superficie definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x(u, v) = \cos(uv), \; y(u, v) = \sin(uv), \; z = v; \; (u, v) \in D\},$$

e

$$D = \left\{ (u, v) : \frac{1}{2} < v < u, \; u < 1 \right\}.$$

Risultati $D = \left\{ (u, v) : 1/2 < u < 1, \frac{1}{2} < v < u, \right\}$, $\|\phi_u \wedge \phi_u\| = v$

$$\int_\Sigma \frac{x^2 + y^2}{z^4} d\sigma = 1/2.$$

Esercizio 3

Disegnare e calcolare il volume del solido di rotazione dato da

$$S = \left\{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \; z^2 - (x^2 + y^2) \leq 1\right\}.$$

Risultati Metà solido si ottiene dalla rotazione intorno all'asse z di

$$E_1 = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq \sqrt{1 + x^2}\} \cup \{(x, z) : 2 \leq x \leq 3, 0 \leq z \leq \sqrt{9 - x^2}\}.$$

Si usa Guldino $V(S) = \frac{4}{3}\pi \left(2(5)^{3/2} - 1\right)$.