Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. P. Mannucci e M. Motta

Risoluzione della prova di **Matematica G** del 21/9/07

Esercizio 1

Data la curva
$$\varphi(t) = (\sinh(3t), \cosh(3t), 3t) \qquad \forall t \in [0,1],$$
(i) verificare che la curva è regolare;
(ii) calcolare la lunghezza di φ;
(iii) determinare le coordinate del baricentro di φ.

Sol. (i) Le tre componenti della curva sono funzioni C^1 e inoltre per ogni t si ha
$$\varphi'(t) = (3\cosh(3t), 3\sinh(3t), 3),$$
per cui
$$|\varphi'(t)|^2 = 9[\cosh^2(3t) + \sinh^2(3t) + 1] = 18\cosh^2(3t) \geq 18 > 0,$$
dove si è fatto uso dell' identità fondamentale $\cosh^2(3t) - \sinh^2(3t) = 1$. Per definizione, queste condizioni implicano che la curva φ è regolare. (ii) La lunghezza è
$$L(\varphi) = \int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt = \int_0^1 3\sqrt{2}\cosh(3t)\, dt = \sqrt{2}\sinh(3).$$
(iii) Le coordinate del baricentro (x_B, y_B, z_B) sono
$$x_B = \frac{1}{\sqrt{2}\sinh(3)}\int_0^1 \sinh(3t)|\varphi'(t)|\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sinh(3)}\int_0^1 \sinh(3t)3\sqrt{2}\cosh(3t)\, dt = \frac{\sinh(3)}{2},$$
dove l'ultimo integrale si può calcolare usando la sostituzione $s = \sinh(3t)$, per cui $ds = 3\cosh(3t)$;
$$y_B = \frac{1}{\sqrt{2}\sinh(3)}\int_0^1 3\sqrt{2}\cosh^2(3t)\, dt = \frac{1}{\sinh(3)}\int_0^1 3\cosh^2(3t)\, dt =,$$
dove integrando per parti e usando l'identità fondamentale delle funzioni iperboliche si ha che
$$\int_0^1 3\cosh^2(3t)\, dt = \int_0^1 (3\cosh(3t))\cosh(3t)\, dt = [\sinh(3t)\cosh(3t)]_0^1 - 3\int_0^1 \sinh^2(3t)\, dt] =$$
$$\sinh(3)\cosh(3) + 3 - 3\int_0^1 \cosh^2(3t)\, dt,$$
per cui portando l'ultima espressione del secondo membro a primo membro
$$2\int_0^1 3\cosh^2(3t)\, dt = \sinh(3)\cosh(3) + 3,$$
e tornando a y_B si ottiene infine
$$y_B = \frac{\sinh(3)\cosh(3) + 3}{2\sinh(3)};$$
$$z_B = \frac{1}{\sqrt{2}\sinh(3)}\int_0^1 9t\sqrt{2}\cosh(3t)\, dt = \frac{3}{\sinh(3)}\int_0^1 t(3\cosh(3t))\, dt = 3 - \frac{\cosh(3) - 1}{\sinh(3)},$$
dove nel secondo passaggio si è integrato per parti.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_S z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

dove S è il solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x dell' insieme

$$E = \left\{(x, y) : \quad x \geq y^2, \quad y \geq x^2\right\}.$$

Sol. L'insieme E è costituito dalla regione del primo quadrante compresa tra le parabole di equazione $x = y^2$ e $y = x^2$ (fare il disegno) che si intersecano nell'origine e in $(1, 1)$. E è un dominio normale sia rispetto ad x che ad y. Infatti, si può scrivere

$$E = \left\{(x, y) : \; x \in [0, 1], \; x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\} = \left\{(x, y) : \; y \in [0, 1], \; y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}.$$

Allora il solido S in coordinate cilindriche di asse x è dato rispettivamente da

$$\begin{aligned} S &= \left\{(x, \rho, \theta) : \quad x \in [0, 1], \; \theta \in [0, 2\pi], \; x^2 \leq \rho \leq \sqrt{x}\right\} \\ &= \left\{(x, \rho, \theta) : \quad \rho \in [0, 1], \; \theta \in [0, 2\pi], \; \rho^2 \leq x \leq \sqrt{\rho}\right\}. \end{aligned}$$

Quindi, considerando la seconda rappresentazione di S, per il teorema di cambiamento di variabili l'integrale richiesto diventa

$$\int_S z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho^2}^{\sqrt{\rho}} \rho\rho^2 \sin^2(\theta) \, dx\right] d\theta\right] d\rho,$$

poichè $z = \rho \sin(\theta)$ e ρ è lo Jacobiano nel passaggio alle coordinate cilindriche. Infine

$$\int_S z^2 \, dx \, dy \, dz = \left(\int_0^1 \rho^3(\sqrt{\rho} - \rho^2) \, d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \, d\theta\right) = \pi\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{18}.$$

(Considerare la prima rappresentazione di S invece della seconda è del tutto equivalente).

Esercizio 3

Data l'equazione

$$x^2 y - 3x \int_0^y e^{t^2} \, dt + 2e^{x-y} = 2e$$

(i) stabilire se l'equazione è esplicitabile rispetto ad x e rispetto ad y in un intorno del punto $(1, 0)$ giustificando la risposta;
(ii) determinare l'equazione della retta tangente in $(1, 0)$ al luogo dei punti definito dall'equazione data.

Sol. (i) Posto $F(x, y) = x^2 y - 3x \int_0^y e^{t^2} \, dt + 2e^{x-y} - 2e$, risulta $F \in C^1$ e inoltre $F(1, 0) = 0 - 3 \cdot 0 + 2e^{1-0} - 2e = 0$. Per il Teorema del Dini, l'equazione $F(x, y) = 0$ è esplicitabile in un intorno del punto $(1, 0)$ rispetto ad x se $F_x(1, 0) \neq 0$ e rispetto ad y se $F_y(1, 0) \neq 0$. Calcolando,

$$F_x(x, y) = 2xy - 3\int_0^y e^{t^2} \, dt + 2e^{x-y}, \quad F_x(1, 0) = 2e,$$

$$F_y(x, y) = x^2 - 3xe^{y^2} - 2e^{x-y}, \quad F_y(1, 0) = 1 - 3 - 2e = -2(1 + e).$$

Quindi l'equazione è esplicitabile sia rispetto ad x sia rispetto ad y in un intorno del punto $(1, 0)$. (ii) L'equazione della retta tangente in $(1, 0)$ è $F_x(1, 0)(x - 1) + F_y(1, 0)y = 0$, quindi

$$2e(x - 1) - 2(1 + e)y = 0.$$