Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. P. Mannucci e M. Motta

Risoluzione della prova di **Matematica G** del 19/12/07

Esercizio 1

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_S (x^2 + y^2) d\sigma,$$

dove S è la superficie definita da

$$S = \left\{ (x, y, z) : \ z = \sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 < 1, \ y > 0 \right\}.$$

Sol. La superficie S è la metà della superficie di un tronco di cono con vertice nell'origine degli assi troncato in $z = 1$ che sta nel semispazio $\{y > 0\}$. Tale superficie si può parametrizzare così $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \ \sin \theta$, $z = \rho$ con $\rho \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, \pi]$. L'elemento d'area è allora $\sqrt{2}\rho$ e

$$\int_S (x^2 + y^2) d\sigma = \sqrt{2} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \, d\theta = \sqrt{2} \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_D \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

dove D è la regione di piano interna alla curva definita implicitamente da

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

con $x > 0$.
(Suggerimento: passare in coordinate polari, tenendo presente che nella definizione della curva è implicita la condizione $x^2 - y^2 \geq 0$).

Sol. Passando a coordinate polari si ottiene che l'equazione della curva è

$$\rho^2 (\rho^2 - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) = 0,$$

e quindi $\rho = \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$.

I punti del semipiano $\{x > 0\}$ che soddisfano la disequazione $x^2 - y^2 \geq 0$ sono i punti che stanno tra le due bisettrici del primo e quarto quadrante quindi sono i punti tali che $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$. Quindi la regione del piano D si può descrivere in coordinate polari con $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ e $\rho \in [0, \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}]$.

$$\int_D \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} d\rho d\theta =$$

attraverso la sostituzione $\rho^2 = t$ si ottiene

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} - 1 \right) d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} 2 \tan(\pi/4) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3

Data la 1-forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y) = \left(3^x\, y - \frac{1}{x(1-xy^2)}\right)\, dx + \left(\frac{3^x}{\log 3} - \frac{2xy}{1-xy^2}\right)\, dy,$$

(i) verificare che ω è chiusa in $A = \{(x,y):\ x > 2, \quad y > 2\}$.
(ii) Dimostrare che ω è esatta in A e determinare la primitiva f di ω tale che $f(3,3) = -1$.

Sol. (i) Se si pone $F_1 = 3^x\, y - \frac{1}{x(1-xy^2)}$ e $F_2 = \frac{3^x}{\log 3} - \frac{2xy}{1-xy^2}$, si ottiene che $F_{1y} = 3^x - \frac{2y}{(1-xy^2)^2} = F_{2x}$.
(ii) La forma è chiusa nel dominio A che è semplicemente connesso quindi è esatta. Per trovare la primitiva cerchiamo una funzione f tale che $f_x = F_1$ e $f_y = F_2$. Integriamo quindi rispetto a y la F_2:

$$f(x,y) = \int \left(\frac{3^x}{\log 3} - \frac{2xy}{1-xy^2}\right) dy + C(x) = \frac{3^x y}{\log 3} + \log|1-xy^2| + C(x).$$

Per trovare la $C(x)$ si deriva l'espressione trovata rispetto a x e si uguaglia a F_1 cosi' ottenendo $C' = -\frac{1}{x}$, da cui C(x)= -log(x)+K. Quindi si ottiene

$$f(x,y) = \frac{3^x y}{\log 3} + \log\frac{|1-xy^2|}{x} + K.$$

Per determinare il K basta imporre che $f(3,3) = -1$ cioè $K = -1 - \frac{3^4}{\log 3} - \log\frac{26}{3}$.