Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. P. Mannucci e M. Motta

Parte A di **Matematica G**

Risoluzione TEMA 1

Esercizio 1

Data la 1-forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x+y}}\,dx - \frac{2y+x}{\sqrt{x+y}}\,dy,$$

(i) determinare e disegnare il dominio A di ω e verificare che la forma differenziale ω è chiusa in esso.
(ii) Dimostrare che ω è esatta in A e determinare una primitiva di ω in tale insieme.
(iii) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è l'arco della curva definita implicitamente da $x^2-y^2=1$, $|y| \le 1$ contenuto in A e percorso nel verso delle y decrescenti.

Sol. (i) $A = \{(x,y):\ x+y>0\}$, quindi A è il semipiano aperto $y > -x$, sopra alla seconda bisettrice. La forma è chiusa, perchè:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right) = -\frac{x}{2(x+y)\sqrt{x+y}}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y+x}{\sqrt{x+y}}\right) = -\frac{\sqrt{x+y}-\frac{2y+x}{2\sqrt{x+y}}}{x+y} = -\frac{x}{2(x+y)\sqrt{x+y}}.$$

(ii) A è convesso e ω è chiusa per (i), quindi ω è esatta per un teorema noto. Con il metodo diretto, una primitiva $f(x,y)$ deve verificare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x+y}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2y+x}{\sqrt{x+y}}.$$

Integrando la seconda equazione in y e osservando che $x+y>0$ in A si ottiene

$$f(x,y) = -\int \frac{2y+x}{\sqrt{x+y}}\,dy = -\int \frac{y+(y+x)}{\sqrt{x+y}}\,dy = -\int \frac{y}{\sqrt{x+y}}\,dy - \int \sqrt{x+y}\,dy =$$

$$= -\frac{4}{3}(x+y)^{3/2} + 2x\sqrt{x+y} + g(x),$$

dove gli ultimi due integrali possono essere risolti per esempio usando per entrambi la sostituzione $s = x+y$ (da cui: $ds = dy$, $y = s-x$ e $\sqrt{x+y} = s^{1/2}$...). Derivando l'espressione appena ottenuta in x ed eguagliando alla prima equazione quanto ottenuto si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x+y} + x\frac{1}{\sqrt{x+y}} + g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x+y}}$$

per cui $g'(x) = 0$ e dunque $g(x) = cost$. In conclusione, la primitiva cercata è

$$f(x, y) = -\frac{4}{3}(x + y)^{3/2} + 2x\sqrt{x + y} + cost.$$

Si noti che, nella ricerca della primitiva, se partiamo integrando la prima equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x + y}}$$

in x e poi completiamo il ragionamento derivando l'espressione trovata in y e uguagliando a

$$-\frac{2y + x}{\sqrt{x + y}},$$

si trova

$$f(x, y) = \frac{2}{3}(x + y)^{3/2} - 2y\sqrt{x + y} + cost.$$

Questa è un altro modo per scrivere l' espressione di f trovata sopra, infatti è facile verificare che per ogni x e y si ha

$$f(x, y) = -\frac{4}{3}(x + y)^{3/2} + 2x\sqrt{x + y} = \frac{2}{3}(x + y)^{3/2} - 2y\sqrt{x + y}.$$

(iii) Per una nota proprietà delle forme esatte, per calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ basta determinare i due estremi della curva orientata γ, P_0 e P_1, poichè vale

$$\int_\gamma \omega = f(P_1) - f(P_0).$$

La curva γ è un arco appartenente al braccio dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ nel semipiano $x > 0$ compreso tra i punti corrispondenti a $y = -1$ e $y = 1$, e orientato da $y = 1$ a $y = -1$ (fare il disegno!) per cui $P_0 = (\sqrt{2}, 1)$ e $P_1 = (\sqrt{2}, -1)$. Quindi

$$\int_\gamma \omega = -\frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1)^{3/2} + 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} - 1} + \frac{4}{3}(\sqrt{2} + 1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2} + 1}.$$

Esercizio 2

Si consideri l'insieme

$$E = \left\{(x, y) : \; x^2 + y^2 - 2x \leq 0, \quad x^2 + y^2 - 3x + 2 \geq 0\right\}.$$

(i) Disegnare E e calcolare

$$\int_E |y| dx\, dy.$$

(ii) Determinare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa attorno all'asse x della porzione di E contenuta nel primo quadrante.

Sol. (i) L'insieme E è dato dai punti interni alla circonferenza di centro $C_1 = (1, 0)$ e di raggio $R = 1$, esclusi quelli interni alla circonferenza più piccola, di centro $C_2 = (3/2, 0)$ e raggio $r = 1/2$ (fare il disegno!).
Nonostante siano coinvolti dei cerchi, non è conveniente ricorrere al cambiamento di variabili in coordinate polari, ma è preferibile scrivere E come unione di domini normali. In effetti, E

è simmetrico rispetto all'asse x e la funzione da integrare, $|y|$, è pari rispetto alla variabile y, per cui basta calcolare l'integrale su $E^+ = E \cap \{(x,y):\ y>0\}$ e moltiplicare per 2. Possiamo rappresentare E^+ come segue

$$E^+ = \left\{(x,y):\ x\in[0,1],\quad 0\le y\le \sqrt{2x-x^2}\right\}\cup$$

$$\cup\left\{(x,y):\ x\in[1,2],\quad \sqrt{3x-x^2-2}\le y\le \sqrt{2x-x^2}\right\}.$$

Quindi per le formule di riduzione l'integrale diventa

$$\int_E |y| dx\, dy = 2\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\, dy\right) dx + 2\int_1^2\left(\int_{\sqrt{3x-x^2-2}}^{\sqrt{2x-x^2}} y\, dy\right) dx = \frac{7}{6}.$$

(ii) Detto S il solido considerato, per il Teorema di Guldino si ha

$$Vol(S) = 2\pi\int_{E^+} y\, dx\, dy = \frac{7}{6}\pi,$$

grazie al punto (i).

Esercizio 3

Data la funzione

$$F(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4,$$

(i) verificare che in un intorno di $p=(0,e,2)$ l'equazione $F(x,y,z)=0$ definisce implicitamente una funzione $z=f(x,y)$.
(ii) Calcolare $f_x(0,e)$.
(iii) Determinare tutti i punti $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ per i quali l'equazione $F(x,y,z)=0$ definisce implicitamente una funzione in due variabili in un intorno di (x_0,y_0,z_0).

Sol. (i) Si ha che $F(0,e,2)=0$ e $F_z(0,e,2)=4-e^2\neq 0$. Essendo la funzione $F(x,y,z)$ una funzione C^1 si può applicare il Teorema del Dini e dire che esiste una funzione implicita $z=f(x,y)$ definita in un intorno di $(0,e)$, tale che $F(x,y,f(x,y))=0$ per ogni (x,y) di tale intorno.
(ii) Si ha che $f_x(0,e) = -\frac{F_x(0,e,2)}{F_z(0,e,2)}$. Quindi $F_x(x,y,z)=z$ e allora $F_x(0,e,2)=2$ da cui $f_x(0,e)=\frac{2}{e^2-4}$.
(iii) In base al Teorema del Dini, l'equazione $F(x_0,y_0,z_0)=0$ definisce implicitamente una funzione in due variabili in tutti i punti $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ per i quali sono verificate le due condizioni

$$F(x_0,y_0,z_0)=0 \quad \text{e} \quad \nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0),$$

dove la seconda significa che almeno una delle tre derivate parziali di F in (x_0,y_0,z_0) è diversa da zero.

Risolvendo $F_x(x,y,z)=z=0$, $F_y(x,y,z)=2y=0$, $F_z(x,y,z)=x+2z-e^z=0$ si ottiene che l'unico punto dove si annulla ∇F è il punto $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,0)$ ma in tale punto la prima condizione $F=0$ non è verificata, infatti $F(1,0,0)=-5$. Quindi $F(x_0,y_0,z_0)=0$ definisce implicitamente una funzione in due variabili in un intorno di tutti i punti $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ che risolvono l'equazione $F(x_0,y_0,z_0)=0$.

TEMA 2

Esercizio 1

Data la 1-forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y) = -\frac{2x+y}{\sqrt{x+y}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x+y}}\,dy,$$

(i) determinare e disegnare il dominio A di ω e verificare che la forma differenziale ω è chiusa in esso.
(ii) Dimostrare che ω è esatta in A e determinare una primitiva di ω in tale insieme.
(iii) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ dove γ è l'arco della curva definita implicitamente da $y - x^2 = 1$, $|x| \leq 1$ contenuto in A e percorso nel verso delle x decrescenti.
Risultati
i)$A = \{y \geq -x\}$.
ii)$f(x,y) = -\frac{4}{3}(x+y)^{3/2} + 2y\sqrt{x+y} + cost. = \frac{2}{3}(x+y)^{3/2} - 2x\sqrt{x+y} + cost. = \frac{2}{3}\sqrt{x+y}(y-2x) + cost.$
iii)$\int_\gamma \omega = f(-1,2) - f(1,2) = 8/3$

Esercizio 2

Si consideri l'insieme

$$D = \left\{(x,y): \; x^2+y^2-2y \leq 0, \quad x^2+y^2-3y+2 \geq 0\right\}.$$

(i) Disegnare D e calcolare

$$\int_D |x| dx\, dy.$$

(ii) Determinare il volume del solido ottenuto da una rotazione completa attorno all'asse y della porzione di D contenuta nel primo quadrante.
Risultati
D è la regione compresa tra le due circonferenze rispettivamente di centro (1,0) e raggio 1 e di centro (3/2,0) e raggio 1/2.

$$\int_D |x| dx\, dy = 7/6.$$

(ii) $V(S) = \frac{7}{6}\pi$

Esercizio 3

Data la funzione

$$F(x,y,z) = z^3 + xy + x^2 - e^x - 9,$$

(i) verificare che in un intorno di $P = (3,0,e)$ l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = f(x,y)$.
(ii) Calcolare $f_x(3,0)$.
(iii) Determinare tutti i punti $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ per i quali l'equazione $F(x,y,z) = 0$ definisce implicitamente una funzione in due variabili in un intorno di (x_0,y_0,z_0).
Risultati
$f_x(3,0) = -\frac{F_x(3,0,e)}{F_z(3,0,e)} = \frac{e^3-6}{3e^2}$