Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. P. Mannucci e M. Motta

Risoluzione dello scritto di **Matematica G** del 6/9/07

Esercizio 1

Data la 1-forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y) = \left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) dy$$

(i) determinare il dominio di ω e verificare che la forma differenziale ω è chiusa in esso.
(ii) Determinare una primitiva f di ω nel semipiano $\{x > 0\}$.
(iii) Calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ è la circonferenza di centro $C = (2,0)$ e raggio 1.

Sol. i) Il dominio di $\omega = adx + bdy$ è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Verifichiamo che la forma è chiusa in tale dominio:

$$a_y = 2y\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} = b_x.$$

ii) Nel sempiano $\{x > 0\}$ la forma è esatta perché il semipiano è semplicemente connesso. Quindi esiste una primitiva $f(x,y)$. Per trovarla partiamo integrando rispetto a y l'uguaglianza $f_y(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ da cui $f(x,y) = x\log(x^2+y^2) + h(x)$. Derivando rispetto a x si ha

$f_x(x,y) = \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + h'(x)$ da cui uguagliando al primo coefficiente $a(x,y)$ si ottiene che $h'(x) = 0$ cioè le primitive sono

$$f(x,y) = x\log(x^2+y^2) + C.$$

iii) Tale integrale è zero perché la circonferenza γ è contenuta nel sempiano $\{x > 0\}$ in cui la forma è esatta.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_S \frac{1}{z^4} d\sigma,$$

dove S è la superficie definita da

$$S = \left\{(x,y,z): \ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \le z \le 2\right\}.$$

Sol. La superficie S si può scrivere in forma cartesiana nel modo seguente

$$S = \left\{ (x, y, z) : \ z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \in C \right\},$$

dove

$$C = \{ \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \}.$$

Possiamo quindi usare la definizione di integrale di superficie dato per le superfici cartesiane del tipo $z = f(x, y)$:

$$\int_S \frac{1}{z^4} d\sigma = \int \int_C (x^2 + y^2) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

L'ultimo fattore nell'integrale è l'elemento d'area calcolato per le superfici cartesiane.

$$f_x = \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \ f_y = \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Quindi si ha

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1 + (x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

e l'integrale diventa

$$\int \int_C (x^2 + y^2) \sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Possiamo descrivere l'insieme C mediante le coordinate polari nel piano

$$C = \{ \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, \theta \in (0, 2\pi) \},$$

e quindi

$$\int \int_C (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 \rho^3 \sqrt{1 + \rho^4} d\rho d\theta = 2\pi \int_{1/2}^1 \rho^3 \sqrt{1 + \rho^4} d\rho.$$

Con la sostituzione $\rho^4 = u$ si ottiene

$$2\pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 \rho^3 \sqrt{1 + \rho^4} d\rho = \frac{\pi}{2} \int_{1/16}^1 \sqrt{1 + u} du = \frac{\pi}{3} (1 + \rho^4)^{3/2} |_{1/2}^1 = \frac{\pi}{3} (2\sqrt{2} - (17/16)^{3/2}).$$

Esercizio 3

Disegnare l'insieme

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2, \ x \geq 0, \ y \leq x^2 \right\}$$

e calcolare

$$\int_E (x + y) dx \, dy.$$

Sol. Il punto di intersezione nel primo quadrante tra la parabola e la circonferenza è $(1, 1)$. L'insieme E si può scrivere come l'unione di due domini normali rispetto a x:

$$E = \{ x \in (0, 1), -\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq x^2 \} \cup \{ x \in (1, \sqrt{2}), -\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}) \}.$$

Quindi usando le formule di riduzione si ottiene

$$\int_E (x + y) dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2 - x^2}}^{x^2} (x + y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2 - x^2}}^{\sqrt{2 - x^2}} (x + y) dy.$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^2} (x+y)dy = \int_0^1 x(x^2+\sqrt{2-x^2}) + \ \frac{1}{2}(x^4-2+x^2) = \frac{40\sqrt{2}-49}{60}.$$

Analogamente il secondo integrale

$$\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (x+y)dy = 2/3$$

da cui si ottiene

$$\int_E (x+y)dx\,dy = \frac{40\sqrt{2}-49}{60} + \frac{2}{3} = \frac{40\sqrt{2}-9}{60}.$$