Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. Paola Mannucci

Parte A di **Matematica G**

Vicenza, 18 giugno 2008

TEMA 1

Esercizio 1

Data la 1-forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y) = 2 + \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \left(1 + \sqrt{k\frac{x}{y}}\right)\,dy.$$

(i) Determinare e disegnare il dominio D di ω, per ogni valore del parametro $k > 0$.
(ii) Determinare per quale valore del parametro positivo k la forma differenziale ω è chiusa in D .
(ii) Dimostrare che, per tale valore del parametro, ω è esatta nel quadrante $x > 0$, $y > 0$.
(iii) Determinare una primitiva f tale che $f(1,1) = 6$.

Svolgimento: i) La forma è definita per le coppie (x,y) tali che $\frac{x}{y} \geq 0$ e quindi le coppie $\{x > 0, y > 0\}$ o $\{x < 0, y < 0\}$. ii) Se chiamo $a(x,y)$ e $b(x,y)$ rispettivamente il primo e il secondo coefficiente della forma, ho: $a_y = \frac{1}{2\sqrt{xy}}$ e $b_x = \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{xy}}$ quindi i due coefficienti sono uguali se e solo se $k = 1$. iii) Il quadrante $x > 0$, $y > 0$ è un dominio semplicemente connesso. Quindi per ii) la forma è esatta. iv)Cerco in tale quadrante una funzione $f(x,y)$ tale che $f_x = a$ e $f_y = b$. Dalla prima condizione ottengo $f_x = 2 + \sqrt{\frac{y}{x}}$ ed integrando in x: $f(x,y) = 2x + 2\sqrt{xy} + g(y)$ da cui imponendo la seconda condizione: $f_y = \sqrt{\frac{x}{y}} + g' = 1 + \sqrt{\frac{x}{y}}$ da cui $g' = 1$ cioè $g(y) = y + C$ e quindi ottengo una primitiva generica nel primo quadrante $f(x,y) = 2x + 2\sqrt{xy} + y + C$. Imponendo la condizione $f(1,1) = 6$ ho $C = 1$ quindi la primitiva richiesta è $f(x,y) = 2x + 2\sqrt{xy} + y + 1$.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_D x\,\frac{(y-x)(4x-y)}{9}dxdy,$$

dove D è il dominio nel piano

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y - x \leq 3, 0 \leq 4x - y \leq 3\},$$

Svolgimento: Considero il cambio di variabili $u = \frac{y-x}{3}$, $v = \frac{4x-y}{3}$ Si può invertire, ottenendo: $x = u + v$, $y = 4u + v$ quindi lo Jacobiano della trasformazione è $\det J(u,v) = -3$.
Il dominio D nello nuove variabili diventa

$$\overline{D} = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\},$$

Quindi

$$\int\int_D x\,\frac{(y-x)(4x-y)}{9}dxdy = \int_0^1\int_0^1 (u+v)\,uv3\,dudv.$$

Prima integriamo in v e poi in u:

$$= 3\int_0^1 u(\frac{u}{2} + \frac{1}{3})du = 1.$$

Esercizio 3

Si consideri la superficie Σ definita da

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) : z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

(i) Disegnare Σ.
(ii) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma z\, d\sigma.$$

Svolgimento:

La superficie e' una parte di un ellissoide ottenuto dalla rotazione intorno all asse z del ramo di ellisse nel piano xz di equazione $z = 2\sqrt{1 - -y^2}$ con $y \in (0, 1/2)$.
Si può pensare come una superficie cartesiana, grafico della funzione $f(x, y) = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ con $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \le 1\}$. L'elemento d'area si calcola con

$$\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{4y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{1 + 3x^2 + 3y^2}{1 - x^2 - y^2}}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma z\, d\sigma = \int\int_D 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\sqrt{\frac{1 + 3x^2 + 3y^2}{1 - x^2 - y^2}}dxdy =$$

$$= \int\int_D 2\sqrt{1 + 3x^2 + 3y^2}dxdy.$$

Passando a coordinate polari si ottiene

$$= 2\int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\rho^2}\rho\, d\rho = \frac{4}{9}\pi\left((\frac{7}{4})^{3/2} - 1\right).$$

L'integrazione finale è stata fatta per mezzo della sostituzione $1 + 3\rho^2 = w$.