Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. Paola Mannucci

Parte A di **Matematica G**

Vicenza, 8 luglio 2008

TEMA 1

Esercizio 1

Data la forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y,z) = \left(e^{2y}\cos(xe^{2y}) + \log z\right)\, dx + 2xe^{2y}\cos(xe^{2y})\, dy + \frac{x}{z}\, dz.$$

(i) Determinare e disegnare il dominio $A \subseteq \mathbb{R}^3$ di ω.
(ii) Dimostrare che la forma differenziale ω è chiusa in A.
(iii) Dimostrare che ω è esatta in A.
(iv) Si calcoli $\int_\gamma \omega$ dove γ è la curva di equazioni $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\sin t$, $z(t) = \sin^3 t + 2$, e $0 \le t \le \pi$ percorsa secondo le t crescenti.

Svolgimento

i) La forma differenziale è definita nel semispazio $z > 0$.
ii) Indicati con a b e c rispettivamente i tre coefficienti della forma si ha: $a_y = 2e^{2y}\cos(xe^{2y}) - e^{2y}\sin(xe^{2y})2xe^{2y} = b_x$, $a_z = \frac{1}{z} = c_x$, $b_z = 0 = c_y$. Quindi la forma è chiusa in A.
iii)La forma è esatta in A perché è chiusa in A che è un dominio stellato.
iv) Calcoliamo una primitiva della forma e questo ci servirà per calcolare l'integrale. Dobbiamo trovare una funzione $f(x,y,z)$ tale che $f_x = a$, $f_y = b$, $f_z = c$. Possiamo cominciare integrando in z l'ultima uguaglianza $f_z = \frac{x}{z}$. Si ottiene $f(x,y,z) = x\log z + g(x,y)$. Ora deriviamo rispetto a x e uguagliamo tale derivata ad a: $f_x = \log z + g_x(x,y) = e^{2y}\cos(xe^{2y}) + \log z$. Da cui $g_x(x,y) = e^{2y}\cos(xe^{2y})$ e integrando in x si ha (per integrare usare la sostituzione: $w = xe^{2y}$, $dw = e^{2y}dx$) $g(x,y) = \sin(xe^{2y}) + h(y)$. Quindi $f(x,y,z) = x\log z + \sin(xe^{2y}) + h(y)$. Ora deriviamo rispetto a y e uguagliamo al coefficiente b: $f_y = 2xe^{2y}\cos(xe^{2y}) + h'(y) = 2xe^{2y}\cos(xe^{2y})$. Quindi si ha $h(y) = K = \textit{costante}$. Quindi le primitive di ω sono tutte le funzioni

$$f(x,y,z) = x\log z + \sin(xe^{2y}) + K$$

con K costante. Quindi l'integrale che dobbiamo calcolare dipende solo dagli estremi della curva, tali estremi sono calcolati per $t = 0$ e $t = \pi$ e sono $P = (0,0,2)$ e $Q = (-\pi, 0, 2)$. Siccome la curva è percorsa nel verso delle t crescenti il punto iniziale è P quello finale è Q da cui si ottiene

$$\int_\gamma \omega = f(Q) - f(P) = f(-\pi,0,2) - f(0,0,2) = -\pi\log 2 + 0 = -\pi\log 2.$$

Esercizio 2

Calcolare il volume del solido S definito da

$$S = \left\{(x,y,z) : 0 \le z \le y,\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \le 0\right\}.$$

Svolgimento

Per definizione $V(S) = \int\int\int_S 1\, dxdydz$. Poiché il solido è già scritto in forma normale si possono usare le formule di riduzione per gli integrali tripli ottenendo

$$V(S) = \int\int_D ydxdy$$

dove $D = S = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0\}$. La disequazione che definisce D si può anche riscrivere $(x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1$ quindi D è costituito dai punti interni ad una circonferenza di raggio 1 e centro $(1,1)$. Usiamo le coordinate polari centrate in $(1,1)$: $x - 1 = \rho\cos\theta$, $y - 1 = \rho\sin\theta$ con $\rho \in (0,1)$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Si ottiene così
$V(S) = \int\int_D ydxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho(1 + \rho\sin\theta)d\rho d\theta = \pi$.

Esercizio 3

Sia $D = \{(u,v) \in \mathbb{R} : u^2 + v^2 < 1, u > 0\}$ e sia Σ la superficie parametrizzata da

$$\phi(u,v) = (u + v, u - v, u^2 + v^2), \quad (u,v) \in D.$$

(i) Dimostrare che Σ è una superficie regolare.
(ii) Trovare l'equazione del piano tangente a Σ in $(1, 0, \frac{1}{2})$.
(iii) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int_\Sigma (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 2z}\, d\sigma.$$

Svolgimento

i) Per dimostrare che Σ è una superficie regolare bisogna verificare che $\phi(u,v)$ è C^1 e questo deriva dal fatto che le derivate di ϕ rispetto a u e v sono continue. Inoltre che è iniettiva, cioè che se $u_1 \neq u_2$, $v_1 \neq v_2$ anche i corrispondenti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) sono diversi. Questo segue direttamente dalla definizione di ϕ. Infatti se $u_1 \neq u_2$, $v_1 \neq v_2$ si ha per esempio $x_1 \neq x_2$. Inoltre bisogna dimostrare che la matrice jacobiana ha rango 2. Si ha $\phi_u = (1, 1, 2u)$ e $\phi_v = (1, -1, 2v)$. Quindi i tre minori A, B e C estratti dalla matrice 3×2 sono tali che $A^2 + B^2 + C^2 = 4 + (2v - 2u)^2 + (2v + 2u)^2 = 4(1 + 2u^2 + 2v^2) > 0$.
ii) Il punto $P = (1, 0, \frac{1}{2})$ è un punto sulla superficie ottenuto da $u_0 = 1/2 = v_0$. Per calcolare il piano tangente si applica la formula

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dove la seconda e terza riga sono state ottenute da $\phi_u = (1, 1, 2u)$ e $\phi_v = (1, -1, 2v)$ calcolate per $u_0 = 1/2 = v_0$. Quindi calcolando tale determinante e ponendolo uguale a zero si ottiene il piano

$$2x - 2z - 1 = 0.$$

iii) Per calcolare l'integrale troviamoci l'elemento d'area : $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 2\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}$.
Quindi per definizione si ha
$\int_\Sigma (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 2z}\, d\sigma = \int\int_D ((u + v)^2 + (u - v)^2)\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}dudv = \int\int_D 2(2u^2 + 2v^2)(1 + 2u^2 + 2v^2)dudv$.
Siccome D è il semicerchio di centro l'origine e raggio 1, usiamo le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ con $\rho \in (0,1)$ e $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Otteniamo:

$$\int\int_D 2(2u^2 + 2v^2)(1 + 2u^2 + 2v^2)dudv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 4\rho^2(1 + 2\rho^2)\rho\, d\rho d\theta = 2\pi.$$