Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Gestionale e Meccanica,
Prof. Paola Mannucci

Parte A di **Matematica G**

Vicenza, 10 settembre 2008

TEMA 1

Esercizio 1

Si consideri la forma differenziale lineare definita da

$$\omega(x,y) = \frac{-y}{3x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{3x^2+y^2}\,dy.$$

(i) Si provi che ω è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e che è esatta in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.
(ii) Se ne calcoli una primitiva.
(iii) Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è l'ellisse di equazione $3x^2 + y^2 = 1$.

Svolgimento: (i)Indicando con a e b i coefficienti della forma si ottiene che $a_y = \frac{-3x^2+y^2}{(3x^2+y^2)^2} = b_x$, quindi la forma è chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ed è esatta in Ω che è un dominio semplicemente connesso. (ii) Integrando il coefficiente a rispetto a x si ottiene $f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}\frac{x}{y}) + g(y)$. Derivando tale espressione rispetto a y e uguagliando al secondo coefficiente si ottiene che $g(y) = costante$, quindi le primitive della forma sono del tipo $f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}\frac{x}{y}) + C$ o equivalentemente $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{y}{x}) + g(y)$. (iii) La forma non è detto che sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ perché tale dominio non è semplicemente connesso. La curva γ contiene nel suo interno il punto $(0,0)$ quindi dobbiamo calcolare esplicitamente l'integrale con la definizione. Conviene parametrizzare la curva chiusa che è un' ellisse, con le coordinate ellittiche $x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta$, $y = \sin\theta$, così si ottiene $\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 2

Si consideri nel piano (y,z) la regione D compresa tra l'asse $z = 1$ e la curva di equazione $z = \sqrt{y-2}$ con $3 \le y \le 6$.
(i) Si calcoli la coordinata y del baricentro di D.
(ii) Si determini il volume del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse z.

Svolgimento: (i)Il dominio D si può scrivere in forma normale: (y,z) tali che $3 \le y \le 6$ e $1 < z < \sqrt{y-2}$. Quindi l'area di D si ottiene così: $A(D) = \int_3^6 (\sqrt{y-2} - 1)\,dy = 5/3$.
La coordinata y_0 del baricentro si ottiene così: $y_0 = \frac{1}{A(D)} \int_3^6 y dy \int_1^{\sqrt{y-2}} dz = \int_3^6 y(\sqrt{y-2} - 1)dy$.
Tale integrale si risolve integrando per parti ottenendo così: $y_0 = \frac{3}{5}(30 - 31\frac{4}{5}) - \frac{9}{5}$.
(ii) Si usa il Teorema di Guldino : $V(S) = 2\pi y_0 A(D)$.

Esercizio 3

Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) : z > \sqrt{3},\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} = 9\}$
(i) Si abbozzi un disegno di Σ.

(ii) Si calcoli il seguente integrale di superficie

$$\int_{\Sigma} z\, d\sigma.$$

Svolgimento: La superficie si può esprimere in forma cartesiana nel seguente modo: $z = \sqrt{27 - 3(x^2 + y^2)}$ con $(x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq 8\}$. Quindi l'elemento d'area per le superfici cartesiane è $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{\frac{27+6(x^2+y^2)}{27-3(x^2+y^2)}}$.
Per definizione di integrale di superficie si ha

$$\int_{\Sigma} z\, d\sigma = \int\int_{D} \sqrt{27 - 3(x^2 + y^2)} \sqrt{\frac{27 + 6(x^2 + y^2)}{27 - 3(x^2 + y^2)}} dxdy = \int\int_{D} \sqrt{27 + 6(x^2 + y^2)} dxdy.$$

Questo integrale doppio si può calcolare passando a coordinate polari: $= \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \sqrt{27 + 6\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{9}((27 + 48)^{3/2} - (27)^{3/2})$.