ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di lunedì 06/10/2014

INSIEMI

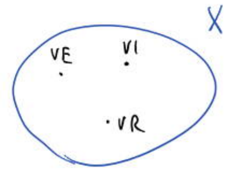
- Rappresentazione ESTENSIVA $\quad X = \{a, b, c, d\}$
- Rappresentazione INTENSIVA $\quad X = \{x : P(x)\}$

$\boxed{\text{Ex}}$ $\quad X = \{x : x$ è provincia veneta che inizia per $V\} = \{VE, VI, VR\}$

$Y = \{x : \overset{P_1(x)}{(x \in \mathbb{R})} \overset{\wedge}{,} \overset{P_2(x)}{(1 \le x < 4)}\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x < 4\} = [1, 4[$

$Z = \{x \in \mathbb{Q} : \overset{P_1(x)}{(0 \le x \le \sqrt{2})} \overset{\vee}{\text{ oppure }} \overset{P_2(x)}{(x > \pi)}\} = \left([0, \sqrt{2}] \cup \,]\pi, +\infty[\right) \cap \mathbb{Q}$

Diagrammi di Venn



Rapporti elemento-insieme: $\quad x \in Y, \; z \notin Y \; ; \; Y \ni x, \; Y \not\ni z$

Rapporti insieme-insieme: $\quad \subset, \supset, \subseteq, \supseteq, =$

$X \subseteq Y, \; Z \nsubseteq Y \; ; \quad X = Y \iff (X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)$

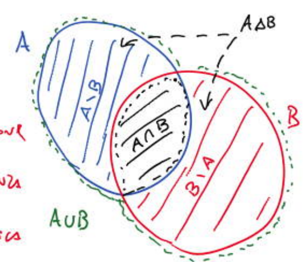
Operazioni tra insiemi: $\quad \cup, \cap, \setminus$

$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$ UNIONE

$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ INTERSEZIONE

$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ DIFFERENZA

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ DIFF. SIMMETRICA

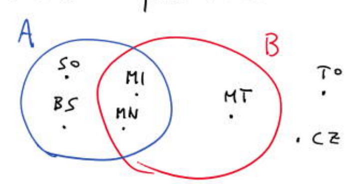


Insieme vuoto $\quad \emptyset$

Se $A \cap B = \emptyset$ (A e B disgiunti), in luogo di $A \cup B$ si scrive spesso $A \sqcup B$

$\boxed{\text{Ex}}$ $\quad A = \{$province lombarde$\}$

$B = \{$prov. italiane che iniziano per M$\}$



INSIEME DELLE PARTI $\quad$ Dato un insieme X, si denota con

$\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\} \qquad X \in \mathcal{P}(X), \; \emptyset \in \mathcal{P}(X)$

$\boxed{\text{Ex}}$ $\quad X = \{a, b, c\} \quad \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$

Se X ha n elementi, $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.

Se X ha n elementi, $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.

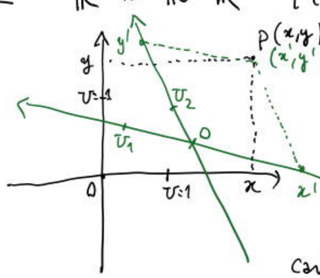
PRODOTTO CARTESIANO Dati due insiemi X, Y, si definisce

$$X \times Y := \{ (x,y) : x \in X,\ y \in Y \}$$

$\boxed{\text{Ex}}$ $X = \{a, b\}$, $Y = \{1,2,3\}$ $\quad X \times Y = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$

Se $|X| = n$, $|Y| = m \Rightarrow |X \times Y| = mn$

$\boxed{\text{Ex.}}$ $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$



La scelta delle coord. cartesiane ortogonali monometriche è per convenienza di misura e di calcolo (es. Teorema di Pitagora) ma non è forzata: potrei scegliere un riferimento generico (verde).

Comunque sia, una volta fissato un sist. di riferimento cartesiano (= due rette non parallele tra loro, ciascuna munita di un sistema di coord. ascisse avente origine nel loro punto intersezione), da quel momento si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}^2$ e i punti del piano.

RELAZIONI In un insieme X, una **RELAZIONE** (binaria) è, liberamente parlando, una possibile "parentela" tra coppie di oggetti di X. Più formalmente: è un sottoinsieme $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Se $(x,y) \in \mathcal{R}$, si dice che x è <u>in relazione con</u> y e si scrive $x \mathcal{R} y$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Relazione di "diversità": $\mathcal{R} = \text{"}\neq\text{"}$ $\quad \mathcal{R} = (X \times X) \setminus \Delta_X$ $\quad$ DIAGONALE: $\{(x,x) : x \in X\}$

Una relazione può avere o non avere le sgg. proprietà notevoli:

- (R) RIFLESSIVITÀ: $x \mathcal{R} x \ \forall x \in X$
- (S) SIMMETRICITÀ: $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$
- (AS) ANTISIMMETRICITÀ: $(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$
- (T) TRANSITIVITÀ: $(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$
- (TOT) TOTALITÀ: $\forall x, y \in X : (x \mathcal{R} y) \vee (y \mathcal{R} x)$

Facciamo alcuni esempi.

	R	S	AS	T	TOT
$(X, \neq)$	NO	sì	NO	NO	NO
$X = U = \{$esseri umani$\}$, $R = \{$voler bene$\}$	NO	NO	NO	NO	NO
$X = \mathbb{R}$, $R = \leq$	sì	NO	sì	sì!	sì
$X = \mathcal{P}(A)$, $R = \subseteq$	sì	No	sì	sì	NO
$X = U$, $R =$ fratelli (≥ 1 genitore comune)	sì	sì	NO	NO	NO
$X = U$, $R =$ coetanei	sì	sì	NO	sì	NO
$X = U$, $R =$ connazionali	sì	sì	NO	sì	NO
$X = \mathbb{Z}$, $R =$ avere lo stesso resto modulo un certo $y \in \mathbb{N}$ fissato	sì	sì	NO	sì	NO

Una relazione che soddisfa R, AS, T è detta ORDINE: l'idea è che un ordine "tende a mettere gli oggetti in gerarchia".

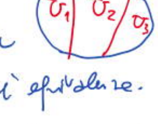
Una relazione che soddisfa R, S, T è detta EQUIVALENZA: l'idea è che un'equivalenza "tende a confondere in un unico oggetto degli oggetti che hanno una certa proprietà in comune".

Nota In $\mathbb{Z}$ sussiste la divisione euclidea: $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists!\, q \in \mathbb{Z}$ (quoziente)
$\exists!\, r \in \mathbb{Z}$ (resto) con $0 \leq r < y$ t.c. $x = qy + r$

$\boxed{\text{Ex}}$ $y = 7$ $\quad 16 = 7 \cdot \overset{q}{2} + \overset{r}{2} \qquad -23 = 7 \cdot \overset{q}{(-4)} + \overset{r}{5}$

Def. Una PARTIZIONE di un insieme X è una famiglia $\{U_i : i \in I\}$ di sottoinsiemi di X t.c. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, e $U_i \cap U_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$
(potevo anche scrivere in una volta sola: t.c. $X = \bigsqcup_{i \in I} U_i$)

Prop. Un'equivalenza in X induce una partizione di X nella famiglia delle relative classi d'equivalenza.



Viceversa, data una partizione qualsiasi di X, la relazione ($x R y \iff x$ e y appartengono allo stesso elem. della partiz.) è equivalenza.
Riassumendo: assegnare un'equivalenza in X corrisponde a dare una partizione di X

Dim. Sia R un'equivalenza in X, e per ogni $x \in X$ definiamo
$U_x := \{y \in X : y R x\}$ (il sottoinsieme degli oggetti di X equivalenti a x).
Allora $\{U_x : x \in X\}$ è una partizione di X. Infatti $\bigcup_{x \in X} U_x = X$ (perché $x \in U_x$ grazie a (R), e questo $\forall x \in X$); inoltre se due sottoinsiemi U_x e $U_{x'}$ non sono disgiunti devono essere uguali, perché se $y \in U_x \cap U_{x'}$

e $z\in U_x$ allora $z\sim x,\ \underbrace{y\sim x}_{(R)},\ y\sim x'$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{z\sim x,\ y\sim x}_{x\sim y\ (T)}}_{z\sim y\ (T)}}_{z\sim x'}$$

ovvero $z\in U_{x'}$,

da cui $U_x\subseteq U_{x'}$, e idem il viceversa $U_{x'}\subseteq U_x \Rightarrow U_x=U_{x'}$.

Viceversa, data una qualsiasi partizione $\{U_i : i\in I\}$ di X, la relazione ($x R y$:= x e y appartengono a uno stesso U_i) è un'equivalenza, come si verifica facilmente. $\square$

Ex. Quali sono le partizioni causate dalle tre equivalenze mostrate negli esempi?

- $X=\mathcal{U}$, R = coetanei: le classi d'equivalenza sono le classi d'età (20 enni, 30 enni, ...)
- $X=\mathcal{U}$, R = connazionali: sono le popolazioni nazionali (italiani, francesi, ...)
- $X=\mathbb{Z}$, R = avere lo stesso resto modulo un fissato $y\in\mathbb{N}$: sono le "classi di resto modulo y", che ripartiscono gli interi $\mathbb{Z}$ in y sottoinsiemi disgiunti (quelli con resto 0 = divisibili per q, quelli con resto 1, con resto 2, ..., con resto $y-1$). L'insieme delle y classi di resto modulo y si denota solitamente con $\mathbb{Z}/y\mathbb{Z}$, ad esempio

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\ \overset{\text{numeri pari}}{\overline{0}}\ ,\ \overset{\text{numeri dispari}}{\overline{1}}\ \}.$$

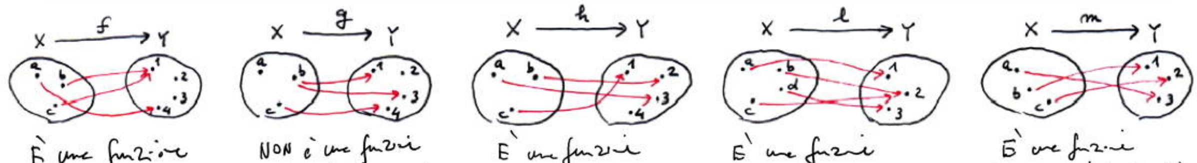
FUNZIONE

Siano X, Y due insiemi $\neq\emptyset$.

Una funzione $f : \underset{\text{dominio}}{X} \longrightarrow \underset{\text{codominio}}{Y}$ (o anche $X\xrightarrow{f}Y$) è, liberamente parlando, una regola che ad ogni elemento x di X assegna un ben chiaro oggetto $\underset{\text{immagine di } x}{f(x)}\in Y$ (altri nomi per "funzione": "mappa", "applicazione").

Più formalmente, è una terna $(X, Y, \underset{\text{grafico}}{\Gamma})$ ove $\Gamma\subseteq X\times Y$ è tale che

$\forall x\in X\ \ \exists!\, y_x\in Y$ t.c. $(x, y_x)\in\Gamma$ $\quad\boxed{y_x =: f(x)}$



È una funzione $f(a)=4$, $f(b)=f(c)=1$ | NON è una funzione: a non ha immagine, b ha immagine multiple | È una funzione (iniettiva) | È una funzione (suriettiva) | È una funzione (biiettiva = inj + surj)