ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di martedì 07/10/2014

COMPOSIZIONE
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \qquad (g\circ f)(x) := g(f(x))$$

$\boxed{\text{Ex}}$ $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x+1 \quad g(x) = x^2-5$

$(g\circ f)(x) = (2x+1)^2-5 = 4x^2+4x-4 \quad (f\circ g)(x) = 2(x^2-5)+1 = 2x^2-9$

La composizione NON È COMMUTATIVA

$\boxed{\text{Ex}}$
$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{Z} \\ \mathcal{U} \arrow[r, "p"] & \mathcal{U} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "r"'] & \\ & & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$
$p(x)$ = padre naturale di x
$q(x)$ = età di x
$r(x)$ = fratello primogenito di x

$(q\circ p)(x)$ = età del padre di x $\quad (r\circ p)(x)$ = zio/zia paterno/a primogenito/a $\quad (p\circ r)(x)$ = "$p(x)$"

IDENTITÀ $\quad X \xrightarrow{id} X \quad id(x) = x$

GRAFICO $\quad f: X \to Y \quad \Gamma = \{(x, f(x)) : x\in X\} \subseteq X\times Y$

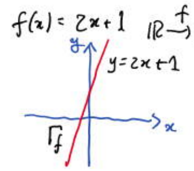
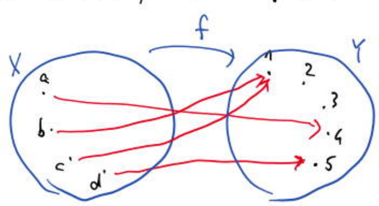


IMMAGINE E ANTIIMMAGINE $\quad f: X\to Y$

- se $A\subseteq X$, def. $f(A) := \{f(x) : x\in A\} \subseteq Y$ (oppure $\overrightarrow{f}(A)$)
- se $B\subseteq Y$, def. $f^{-1}(B) := \{x\in X : f(x)\in B\} \subseteq X$ (oppure $\overleftarrow{f}(B)$)

$\boxed{\text{Ex.}}$



Nro di funzioni possibili: 5^4

$A = \{b, c\} \quad f(A) = \{1\}$

$B = \{1,3,4\} \quad f^{-1}(B) = \{a, b, c\}$

$B' = \{2,3\} \quad f^{-1}(B') = \emptyset$

$\boxed{\text{Ex}}$ $p: \mathcal{U}\to\mathcal{U} \quad p(x)$ = padre naturale di x $\quad L$ = {donne francesi} $\subseteq \mathcal{U}$

$p(L)$ = {padri naturali di qualche donna francese} $\quad p^{-1}(L) = \emptyset$

Se $A\subseteq X$, $A\neq\emptyset \Rightarrow f(A)\neq\emptyset$; se $B\subseteq Y$, $B\neq\emptyset$, può accadere che $f^{-1}(B) = \emptyset$.

$f(X)\subseteq Y$ IMMAGINE DI f

Prop. | Se $B\subseteq Y$, allora $f^{-1}(B)\neq\emptyset \iff B\cap f(X)\neq\emptyset$

$\boxed{\text{Ex.}}$ $f(X) = \{1, 4, 5\} \quad B'\cap f(X) = \emptyset$

FIBRA Se $y \in Y$, si def. $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X : f(x) = y\}$

$\boxed{\text{Ex.}}$ $f^{-1}(1) = \{b, c\}$ $f^{-1}(2) = f^{-1}(3) = \emptyset$ $f^{-1}(4) = \{a\}$ $f^{-1}(5) = \{d\}$

Prop. Nel dominio, "appartenere alla stessa fibra" è un'equivalenza. Di conseguenza, la famiglia delle fibre di una funzione è una partizione del dominio.

RESTRIZIONE, CORESTRIZIONE $f : X \to Y$

$A \subseteq X$ $f|_A : A \to Y$ $x \in A \rightsquigarrow f(x)$ come prima restrizione: non dà problemi.

$B \subseteq Y$ $f|^B : X \to B$ $x \in X \rightsquigarrow f(x)$ come prima corestrizione: si può se $f(X) \subseteq B$

Tuttavia, si potrà corestringere a B se si avrà in precedenza ristretto f a un $A \subseteq X$ t.c. $f(A) \subseteq B$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\ni y}$ $h(x) = x^2 - 2x - 3$

Determiniamo le fibre di h. Sia $y \in \mathbb{R}$ (codominio) e calcoliamo

$h^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$. $x^2 - 2x - 3 = y$ $x^2 - 2x - 3 - y = 0$

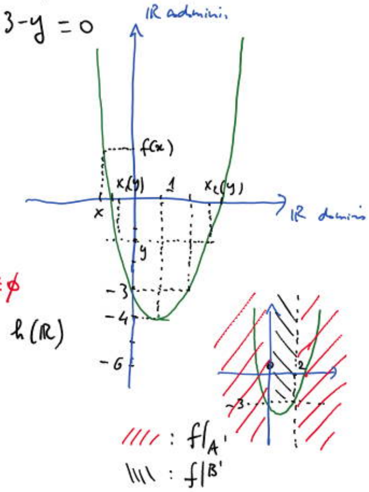
$x = 1 \pm \sqrt{4+y}$ $\Leftarrow$ solo se $y \geq -4$! . Dunque

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y < -4 \\ \{1\} & \text{se } y = -4 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1(y) = 1 - \sqrt{4+y} \\ x_2(y) = 1 + \sqrt{4+y} \end{array} \right\} & \text{se } y > -4 \end{cases}$$

$h(\mathbb{R}) = [-4, +\infty[$ immagine di h: gli y t.c. $f^{-1}(y) \neq \emptyset$

$B =]-6, +\infty[$ posso corestringere h a B perché $B \supseteq h(\mathbb{R})$

$B' =]-\infty, -3]$ $A' = [0, 2]$ $h|_{A'}^{B'} : A' \to B'$



FUNZIONE INIETTIVA $f : X \to Y$ è iniettiva se manda elem. distinti del dominio in immagini distinte: $\begin{cases} x_1, x_2 \in X \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ OPPURE $\begin{cases} x_1, x_2 \in X \\ f(x_1) = f(x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$

OPPURE le fibre di f hanno AL PIÙ 1 elemento.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Se $A \subseteq X$, $i_A : A \to X$ $i_A(x) = x$ INCLUSIONE: prototipo di funz. iniettiva

La funz. iniettiva dà l'idea di "insieme piccolo che si immerge in uno grande"

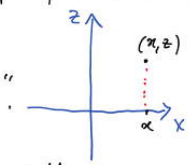
FUNZIONE SURIETTIVA $f: X \to Y$ è suriettiva se riempie tutto il codominio:

$\forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$ OPPURE $f^{-1}(y) \neq \emptyset \ \forall y \in Y$ OPPURE $f(X) = Y$

$\boxed{\text{Ex.}}$ X, Z insiemi $\pi : X \times Z \to X$ $\pi(x,z) = x$ PROIEZIONE: prototipo di funz. surj.

Esempio: $X = Z = \mathbb{R}$ $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\pi(x,z) = x$

La funz. suriettiva dà l'idea di "insieme grande che ricopre uno piccolo".



FUNZIONE BIIETTIVA $f: X \to Y$ è biiettiva se è sia iniettiva che suriettiva:

$\forall y \in Y \ \exists! \, x \in X : f(x) = y$ OPPURE $f^{-1}(y)$ ha esattamente 1 elemento $\forall y \in Y$

Se $f: X \to Y$ è biiettiva, è definita la **FUNZIONE INVERSA** $g: Y \to X$ che manda $y \in Y$ nell'unico x delle sue fibre, cioè $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$

- Una funzione può essere resa iniettiva restringendone il dominio in modo opportuno
- Una funzione può essere resa suriettiva corestringendola alla sua immagine.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = x^2 - 2x - 3$

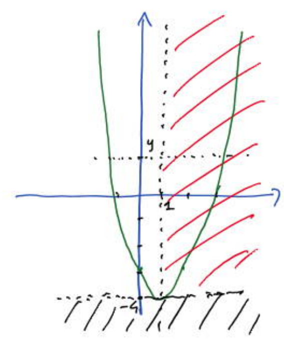
non è né inj né suriettiva, ma:

- corestringendola a $h(\mathbb{R}) = [-4, +\infty[$ diventa suriettiva
- restringendola a $A =]-\infty, 1]$ diventa iniettiva

$h\Big|_{]-\infty,1]}^{[-4,+\infty[} :]-\infty, 1[\ \to [-4, +\infty[$ ora è biiettiva

$g = \left(h\Big|_{]-\infty,1]}^{[-4,+\infty[} \right)^{-1} : [-4, +\infty[\ \to \ ]-\infty, 1]$

$g(y) = x_1(y) = 1 - \sqrt{4+y}$ (avessimo scelto di restringere a $[1, +\infty[$ avremmo ottenuto l'altra inversa $x_2(y) = 1 + \sqrt{4+y}$)



Questa è una dimostrazione concreta del **METODO DELLA FIBRA**: se si riesce a calcolare le fibre di una funzione, si ottengono immediatamente informazioni importanti su iniettività, suriettività, calcolo dell'inversa, calcolo delle immagini (mentre il calcolo delle antimmagini è tipicamente un procedimento meccanico).

$\boxed{\text{Ex.}}$ $p: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ $p(x) =$ padre naturale di x.

Inj? $p(x_1) = p(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$ No! Possono essere fratelli

Surj? Calcoliamo le fibre di p: se $y \in \mathcal{U}$, $p^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y \text{ non è un padre} \\ \{\text{figli naturali di } y\} & \text{se } y \text{ è padre.} \end{cases}$

Visto che ci sono fibre vuote, p non è surj.

Come rendere p biiettiva? Devo corestringerla a $p(\mathcal{U}) =: \mathcal{L} = \{\text{padri naturali}\}$.

e così $p|^{\mathcal{L}} : \mathcal{U} \to \mathcal{L}$ diventa suriettiva. Poi restringo p a $\mathcal{M} = \{$primogeniti$\}$

$p|^{\mathcal{L}}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ è biiettiva. Inversa: $(p|^{\mathcal{L}}_{\mathcal{M}})^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ $y \mapsto$ primogenito di y

Sia $\mathcal{T} = \{$abitanti di Milano$\}$ $p^{-1}(\mathcal{T}) = \{$esseri umani il cui padre vive a Mi$\}$

$p(\mathcal{T}) = \{$padri dei milanesi$\}$

$\boxed{\text{ESERCIZIO PER CASA}}$ Studiare questioni simili per $q : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$, $q(x) =$ età di x;

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$