ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 08/10/2014

Vediamo uno degli esercizi assegnati ieri.

• $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2}$

Inj? Metodo delle fibre: calcoliamo le fibre di g.

$y \in \mathbb{R}$ codominio $\leadsto$ $g^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = y\}$

$\dfrac{2x-1}{x^2+2} = y \qquad 2x-1 = x^2y + 2y \qquad x^2y - 2x + 2y + 1 = 0$

se $y=0$: $-2x+1=0 \quad x = 1/2 \implies g^{-1}(0) = \{1/2\}$

se $y \neq 0$: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-y(2y+1)}}{y} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-y-2y^2}}{y}$ se $1-y-2y^2 \geq 0$ ovvero $2y^2+y-1 \leq 0$ ovvero $-1 \leq y \leq 1/2$

Riassumendo:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y<-1 \vee y > 1/2 \\ \{-1\} & \text{se } y = -1 \\ \{1/2\} & \text{se } y = 0 \\ \{2\} & \text{se } y = 1/2 \\ \left\{x_1(y) = \dfrac{1-\sqrt{1-y-2y^2}}{y},\ x_2(y) = \dfrac{1+\sqrt{1-y-2y^2}}{y}\right\} & \text{se } -1<y<\frac{1}{2},\ y \neq 0 \end{cases}$$

Dunque g non è inj (ci sono pti del codominio – ovvero "valori" – che hanno più di un pt nella fibra); e nemmeno surj (molti valori hanno fibra vuota); l'immagine di g è $g(\mathbb{R}) = [-1, 1/2]$ (i valori y con fibre $\neq \emptyset$).

Altro metodo per studiare l'inj: $\begin{cases} x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ dom.} \\ g(x_1) = g(x_2) \end{cases} \overset{?}{\implies} x_1 = x_2$

$\dfrac{2x_1-1}{x_1^2+2} = \dfrac{2x_2-1}{x_2^2+2} \iff (2x_1-1)(x_2^2+2) = (2x_2-1)(x_1^2+2) \iff$

$(x_1-x_2)(2x_1x_2 - x_1 - x_2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1x_2 = x_1+x_2+4 \end{cases}$

La 2ª cond. è sodd. ad es. per $x_1 = 0$ e $x_2 = -4$, che sono diversi; dunque g non è inj.

• Calcoliamo l'antiimmagine $g^{-1}\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]\right) = \{x \in \underset{\text{dom}}{\mathbb{R}} : g(x) \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{2} < g(x) \leq \frac{1}{3}\}$ $\quad \begin{cases} \frac{2x-1}{x^2+2} > -\frac{1}{2} \\ \frac{2x-1}{x^2+2} \leq \frac{1}{3} \end{cases}$ risoluzione di calcolo:

risulta $(x<-4) \vee (0<x\leq 1) \vee (x \geq 5) =]-\infty, -4[\cup]0,1] \cup [5, +\infty[$

• Calcoliamo $g([-2,1[) = \{g(x) : x \in [-2,1[\} = \{g(x) : -2 \leq x < 1\}$

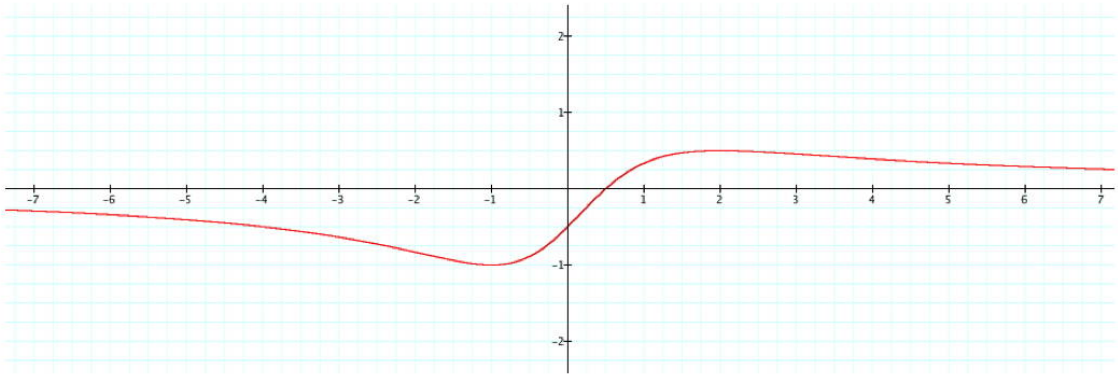
La domanda è: quali sono gli y del codominio che appartengono a tale immagine?

Usiamo il metodo delle fibre: un certo y starà nell'immagine $\iff$ conterrà nella sua fibra almeno un $x \in [-2, 1[$.
Di certo non gli $y < -1$ oppure $y > 1/2$ (hanno fibra ϕ); ci stanno poi $y = -1$ e $y = 0$, ma non $y = 1/2$. E gli altri? Dovrà imporsi che
$(-2 \leq x_1(y) < 1) \vee (-2 \leq x_2(y) < 1)$, ovvero $\left(-2 \leq \frac{1-\sqrt{1-y-2y^2}}{y} < 1\right) \vee \left(-2 \leq \frac{1+\sqrt{1-y-2y^2}}{y} < 1\right)$
(attenzione: è $\vee$ e non $\wedge$, dunque le soluzioni vanno unite, non intersecate come nei sistemi!), e a questo punto è diventata una questione di conti, che alla fine danno $y \in [-1, 1/3[$.

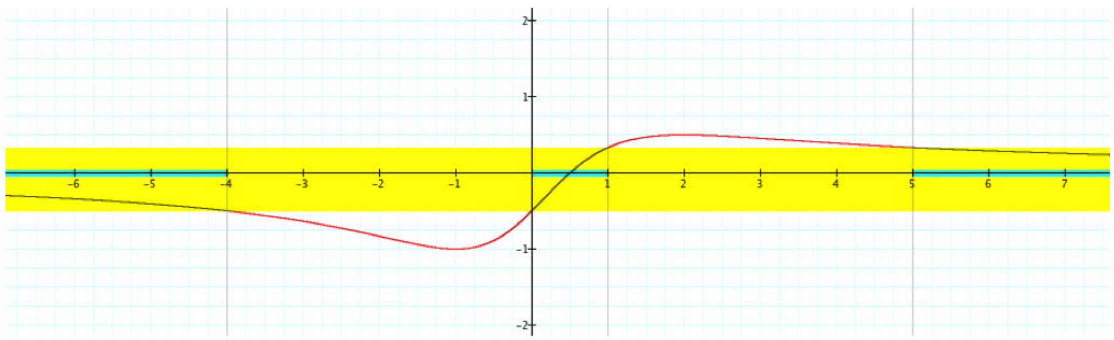
- Per rendere g suriettiva basta corestringerla alla sua immagine $[-1, 1/2]$.
Più delicata, in questo caso, è la questione di come renderla iniettiva: si tratta di restringere il dominio in modo da escludere uno dei due elementi $x_1(y)$ e $x_2(y)$, senza dimenticare che, una volta ristretti, bisognerà accertare per bene quale sia l'immagine del nuovo dominio.
Possiamo ad esempio osservare che per $0 < y \leq 1/2$ si ha $x_2(y) = \frac{1+\sqrt{1-y-2y^2}}{y} > \frac{1}{y} \geq \frac{1}{1/2} = 2$; che, quando y si avvicina a 0, $x_2(y)$ diventa molto grande; e che per $0 < y < \frac{1}{2}$ si ha $x_1(y) = \frac{1-\sqrt{1-y-2y^2}}{y} < 2$, come si può verificare direttamente. Tutto ciò ci dice che, se restringiamo g a $[2, +\infty[$, l'unico elemento della fibra che sopravvive è $x_2(y)$: dunque $g|_{[2,+\infty[}$ è di certo iniettiva. E l'immagine di $[2, +\infty[$ è $]0, 1/2]$, come si deduce dallo studio delle fibre e dal fatto che, come visto, se $0 < y \leq 1/2$ allora $x_2(y) \geq 2$.

Pertanto $g\big|_{[2,+\infty[}^{]0,1/2]} : [2, +\infty[\longrightarrow]0, 1/2]$ è biiettiva, con inversa $x_2(y)$.

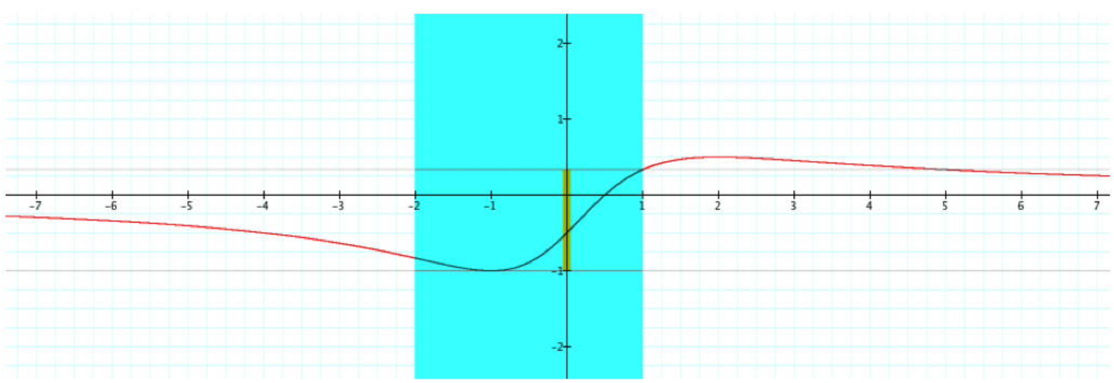
Evochiamo ora il grafico di g, per vedere se quanto trovato è sensato.



Dal grafico è evidente quanto detto a proposito di iniettività, suriettività, immagine e biiettività di g.



La figura soprastante giustifica quanto trovato per $g^{-1}(]-1/2, 1/3])$ (i tratti di grafico che cadono nella banda gialla sono quelli sopra gli x dell'antiimmagine).



E quest'ultima figura giustifica quanto trovato per l'immagine $g([-2,1[)$ (i valori raggiunti dagli $x \in [-2,1[$ sono le ordinate del tratto di grafico che cade nella banda azzurra, ovvero l'intervallo verticale giallo).

Osservazione A titolo di commento, notiamo che l'immagine di un intervallo (= sottoinsieme di $\mathbb{R}$ connesso, ovvero "privo di buchi") è risultata essere un intervallo: questo è un fatto generale (l'immagine tramite una funzione continua di un insieme connesso è un insieme connesso), su cui torneremo in futuro. Invece questa cosa non accade, come si è visto, per l'antiimmagine.

Parliamo della nozione algebrica di "gruppo".

Un'operazione (binaria) su un insieme G è una funzione $*: G \times G \longrightarrow G$; anziché scrivere $*(x,y) = z$ si scrive solitamente $x * y = z$

Un'operazione si dice associativa se $(x*y)*z = x*(y*z) \quad \forall x,y,z \in G$

si dice commutativa se $x*y = y*x \quad \forall x,y \in G$.

GRUPPO Un insieme G munito di un'operazione $*$ è detto gruppo se

- l'operazione è associativa
- esiste in G un (unico) elemento neutro per $*$, ovvero $e \in G$ t.c. $x*e = x \ \forall x$
- $\forall x \in G \ \exists y \in G$ t.c. $x*y = y*x = e$ ($y = x^{-1}$ è detto inverso di x)

$\boxed{\text{Es.}}$

- $(\mathbb{N}, +)$ non è gruppo (manca l'inverso, ovvero l'"opposto").
- $(\mathbb{Z}, +)$ è gruppo ($e = 0$, $x^{-1} = -x$)
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è gruppo (manca l'inverso, ovvero il "reciproco")
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ non è gruppo ($x = 0$ non ha il reciproco)
- $(\mathbb{Q}^{\times} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ è gruppo ($e = 1$, $x^{-1} = 1/x$)

$\boxed{\text{ESERCIZIO PER CASA}}$ $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g(x) = \log(x^2 - 2x + 2)$, $h(x) = e^{\cos x}$.
Determinare dominio; compostle; trovare $f^{-1}([2,6[)$, $g^{-1}([1,+\infty[)$, $h^{-1}([1, e/2[)$
Calcolare le fibre; usarle per calcolare $h([\pi/2, 4[)$.
Inj? Surj? Calcolare le inverse (restringendo e corestringendo opportunamente)

(Di questo esercizio verrà fornita una traccia di risoluzione in calce alla prossima lezione.)

Diamo ora una traccia di risoluzione per gli esercizi proposti nelle lezioni di ieri.

$\boxed{\text{ESERCIZIO PER CASA}}$ Studiare questioni simili per $q : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$, $q(x) =$ età di x;
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x-1}{x^2+2}$

- Di $g(x)$ abbiamo già parlato a lezione ..
- $q : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$ $q(x) =$ età di x

Inj? $q(x_1) = q(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$ No! Sono solo coetanei.
Surj? No! Es.: $q^{-1}(-5) = \emptyset$
Se $r \in \mathbb{Z}$, le fibre $q^{-1}(r) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } r<0 \text{ oppure se } r \text{ è un'età mai raggiunta} \\ \{\text{persone di età } r \text{ anni}\} & \text{se } r \text{ è un'età raggiunta da qualche essere umano} \end{cases}$

Sia $\mathcal{R} = \{$età raggiunte dagli esseri umani$\} \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
Allora $q|^{\mathcal{R}} : \mathcal{U} \to \mathcal{R}$ è surj.

Per renderla inj, dovrei restringere a un sottoinsieme fatto da un solo rappresentante per ogni età raggiunta. (Es.: Matusalemme per $r = 525$)

- $q^{-1}(\{-3, -1, 0\}) = \{x \in \mathcal{U} : x \text{ ha } -3 \text{ o } -1 \text{ o } 0 \text{ anni}\} = \{$bimbi neonati, che non hanno ancora 1 anno$\}$

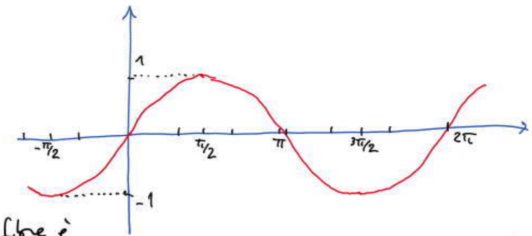
- Se $A \subseteq \mathcal{U}$ è una classe tipica (mista) di scuola materna, cos'è $q(A)$?

$q(A) = \{q(x) : x \in A\} = \{r \in \mathbb{Z} : \exists x \in A \text{ con } q(x) = r\} = \{3, 4, 5\}$.

• $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

Inj? $\sin x_1 = \sin x_2 \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$

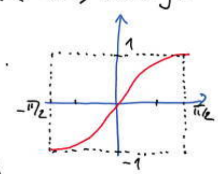
No! $x_2 = \begin{cases} x_1 + 2k\pi \\ \pi - x_1 + 2k\pi \end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$



Surj? Se $y \in \mathbb{R}$ (codominio), la fibra è

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } |y| > 1 \rightsquigarrow \text{No SURJ!} \\ \{\arcsin y + 2k\pi,\ \pi - \arcsin y + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} & \text{se } |y| \le 1 \rightsquigarrow \text{No INJ!} \end{cases}$$

Come renderla bij? $f|_{[-\pi/2,\pi/2]}^{[-1,1]} : [-\pi/2, \pi/2] \xrightarrow{\sim} [-1,1]$ lo è.

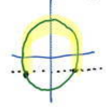


Inversa: $\arcsin : [-1,1] \xrightarrow{\sim} [-\pi/2, \pi/2]$ (arco-seno)

(Stesso discorso per $\ell(x) := \cos x$: $\ell|_{[0,\pi]}^{[-1,1]}$ è bij, con inversa $\arccos : [-1,1] \xrightarrow{\sim} [0,\pi]$ (arco-coseno).)

• Calcolo di un'antiimmagine: $f^{-1}([-1/3, 5]) = \{x \in \mathbb{R} : -1/3 \le \sin x \cancel{\le 5}\}$

$\sin x \ge -\frac{1}{3}$



$\arcsin(-\frac{1}{3}) + 2k\pi \le x \le \pi - \arcsin(-1/3) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

ovvero, essendo arcsin dispari, posto $\alpha := \arcsin 1/3$:

$-\alpha + 2k\pi \le x \le \pi + \alpha + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$,

unione disgiunta infinita di intervalli del tipo $[-\alpha + 2k\pi, \pi + \alpha + 2k\pi]$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

• Calcolo di un'immagine: $f(]-\pi/4, 5\pi/6[)$. Di certo all'immagine non appartengono gli y con $|y| > 1$; invece per un y con $|y| \le 1$ la condiz. è che (almeno) uno degli elementi della sua fibra stia in $]-\pi/4, 5\pi/6[$, ovvero

$-\pi/4 < \arcsin y + 2k\pi < 5\pi/6$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ (unione).

$-\pi/4 < \pi - \arcsin y + 2k\pi < 5\pi/6$

Poiché $-\pi/2 \le \arcsin y \le \pi/2$, ciò è in realtà possibile solo quando $k = 0$:

$-\pi/4 < \arcsin y \cancel{< 5\pi/6}$ (ovvio) $\iff \arcsin y > -\pi/4 \iff -\sqrt{2}/2 < y \le 1$

$\cancel{-\pi/4 <}$ (ovvio) $\pi - \arcsin y < 5\pi/6 \iff \arcsin y > \pi/6 \iff 1/2 < y \le 1$.

L'immagine cercata risulta dunque $]-\sqrt{2}/2, 1] \cup]1/2, 1] =]-\sqrt{2}/2, 1]$.