ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di lunedì 13/10/2014

CARDINALITÀ

Due insiemi si diranno "avere la stessa cardinalità" se tra essi esiste una biiezione.

- Se gli insiemi sono <u>finiti</u>, ciò significa semplicemente "avere lo stesso numero di elem."
- Se gli insiemi sono <u>infiniti</u>, ciò è una nuova nozione, e può dare luogo al curioso fenomeno per cui un insieme ha le stesse cardinalità di un suo sottoinsieme.

Un insieme avente la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ è detto NUMERABILE

$\boxed{Ex.}$ · Numeri pari $2\mathbb{N}$ (biiezione: $\mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$)

· Numeri interi $\mathbb{Z}$ (biiezione: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto -1$, $4 \mapsto 2$, $5 \mapsto -2$, ..., in generale: $n \mapsto (-1)^n \left[\frac{n}{2}\right]$ ove $[\cdot]$ indice la "parte intera" di un numero reale (vedi più tardi)

· Numeri razionali $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{cccccccc}
0^{1} & 1^{2} & -1^{4} & 2^{7} & -2^{11} & 3 & -3 & \cdots \\
1/2^{3} & -1/2^{5} & 3/2^{8} & -3/2 & 5/2 & -5/2 & 7/2 & \cdots \\
1/3^{6} & -1/3^{9} & 2/3 & -2/3 & 4/3 & -4/3 & 5/3 & \cdots \\
\vdots^{10} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

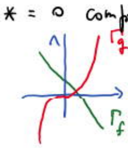
L'ultima volta si è iniziato a parlare della nozione algebrica di GRUPPO.

Un gruppo $(G,*)$ si dirà COMMUTATIVO (o ABELIANO) se $x*y = y*x \quad \forall x,y \in G$.

$\boxed{Ex}$ Tutti i gruppi dell'altra volta sono commutativi: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q}^{\times},\cdot)$ $= \mathbb{Q}\setminus\{0\}$

$\boxed{Ex.}$ Naturalmente anche $(\mathbb{R},+)$ lo è (elem. neutro $e=0$, inverso di x è l'opposto $-x$) e anche $(\mathbb{R}^{+}_{\times},\cdot)$ $= \mathbb{R}_{>0}$ (elem. neutro $e=1$, inverso di $x>0$ è il reciproco $1/x$)

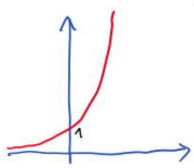
$\boxed{\text{Ex}}$ Sia X insieme. $G = \{ X \xrightarrow[\sim]{f} X \text{ biiettive} \}$, $* = \circ$ composizione
È un gruppo NON commutativo!
Ex. $X = \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \xrightarrow[g]{f} \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 1-x \quad g(x) = x^3$
$(g \circ f)(x) = (1-x)^3 \quad (f \circ g)(x) = 1 - x^3$



Ex. $X = \{1, \dots, n\}$ $\quad G = S_n$ (oppure $\mathfrak{S}_n$) gruppo delle PERMUTAZIONI di n elementi
Già sappiamo che $|S_n| = n!$

Siano $(G,*)$ e $(H,\circ)$ due gruppi, $f : G \to H$ una funzione.
f si dirà essere un MORFISMO (di gruppi) se rispetta le operazioni di G e H,
ovvero $f(x*y) = f(x) \circ f(y) \quad \forall x,y \in G$
Se f è biiettiva, si dirà ISOMORFISMO (ovvero: i due gruppi sono "copie conformi")

$\boxed{\text{Ex}}$ $(\mathbb{R},+) \xrightarrow{exp} (\mathbb{R}^{+}_{\times}, \cdot)$ $= \mathbb{R}_{>0}$ $\quad exp(x) = e^x$ ESPONENZIALE NATURALE



Notiamo che $exp(x+y) = (exp\, x) \cdot (exp\, y)$: è un morfismo!
Inj? $e^x = e^y \overset{?}{\Rightarrow} x = y$ sì.
Surj? $z > 0 \Rightarrow \exists^? x \in \mathbb{R}$ t.c. $exp(x) = z$? Sì: $x = \log z$
Dunque exp è isomorfismo: i due gruppi sono uno la copia conforme dell'altro.

Sia $(A,+,\cdot)$, ove "+" e "·" sono due operazioni su A.
La Terna si dice ANELLO se $(A,+)$ è un gruppo commutativo,
e la "·" è distributiva rispetto alla "+": $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
Di solito si indica con "0" l'elem. neutro risp. a "+"
Se esiste l'elem neutro risp. "·", l'anello si dice UNITARIO (elem. neutro: "1")
Se inoltre la "·" è commutativa, l'anello si dice COMMUTATIVO.
$\boxed{\text{Ex}}$ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ anello unitario comm. ; $(2\mathbb{Z},+,\cdot)$ numeri pari anello comm. NON unitario.
Se X insieme, $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ è anello (di Boole) unitario comm.

Sia $(K,+,\cdot)$ un anello unitario. Se $(K^{\times},\cdot)$ $K \setminus \{0\}$ è gruppo, si dirà che $(K,+,\cdot)$ è un CORPO. Un corpo commutativo si dice CAMPO.
Questa è la struttura più desiderabile!
$\boxed{\text{Ex}}$ $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ campo ; $(\mathbb{R},+,\cdot)$ idem.

Infine, sia $(K,+,\cdot)$ un campo dotato di un ordine totale "$\leq$".
Esso si dirà CAMPO TOTALMENTE ORDINATO se valgono le seguenti due compatibilità:

(1) $x_1 \leq x_2 \implies x_1 + y \leq x_2 + y \qquad \forall x_1, x_2, y$

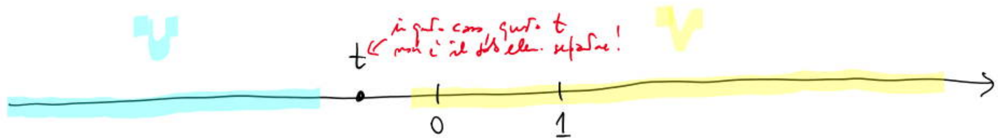
(2) $x_1 \leq x_2 \implies x_1 y \leq x_2 y \qquad \forall y \geq 0$

$\boxed{\text{Ex}}$ $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$

NUMERI REALI

I numeri reali possono essere caratterizzati come un CAMPO TOTALMENTE ORDINATO E COMPLETO: si intende che sono un campo totalmente ordinato $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ che in più soddisfa

(CO) (PROPRIETÀ DI COMPLETEZZA): se U, V sono sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $U \leq V$ (ovvero $x \leq y \ \forall x \in U \ \forall y \in V$), allora esiste sempre qualche elemento separatore $t \in \mathbb{R}$, ovvero t.c. $U \leq t \leq V$.



Due sottoinsiemi U e V di $\mathbb{R}$ t.c. $U \leq V$ ed $\exists!$ (unico!) elem. separatore tra essi sono detti CLASSI CONTIGUE.

Si dimostra che

Teorema | I numeri reali $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ sono l'unico campo tot. ordinato e completo, "a meno di isomorfismi" (cioè copie conformi)

In effetti, aggiungere la completezza esclude i razionali $\mathbb{Q}$:

Prop. | $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ NON sono un campo tot. ord. e completo.

Dim. Ci basta trovare $U,V \subseteq \mathbb{R}$ con $U \leq V$ t.c. $\nexists\, t \in \mathbb{Q}$ t.c. $U \leq t \leq V$.
Sia $U = \{x \in \mathbb{Q} : x>0,\ x^2<2\}$, $V = \{x \in \mathbb{Q} : x>0,\ x^2>2\}$.
Ora, la funzione quadrato $f(x)=x^2$ è crescente (cioè $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \\ x_1,x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 \leq x_2^2$):
infatti se $0 \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_2^2 - x_1^2 = (\overset{\geq 0}{x_2+x_1})(\overset{\geq 0}{x_2-x_1}) \geq 0$, perciò $U \leq V$.
Sia per assurdo $t \in \mathbb{Q}$ un eventuale elem. separatore: allora
$\begin{cases} t^2 \leq 2 \\ t^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow t^2 = 2$. Ma ciò è impossibile: supponendo $t = \frac{m}{n}$ con m,n coprimi
allora $t^2 = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ è pari $\Rightarrow m$ è pari $\Rightarrow m^2$ è div. per 4
$\Rightarrow 2n^2$ è div. per 4 $\Rightarrow n^2$ è pari $\Rightarrow n$ è pari □

Questo risultato stabilisce le caratteristiche univoche di $\mathbb{R}$ come campo tot. ord. e completo, opereremo con le consuete conoscenze dei numeri reali (es. $\mathbb{R}$ si identifica con una retta non appena si fissi sulla retta un sistema di coord. ascisse).

INTERVALLO in $\mathbb{R}$ Un sottoinsieme $I \subseteq \mathbb{R}$ si dirà "intervallo" se, dati comunque $x,y \in I$ e dato $t \in \mathbb{R}$ t.c. $x \leq t \leq y$, allora anche $t \in I$. ("I non ha buchi")
Sono dei seguenti tipi: $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$ INT. LIMITATI
$[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,b[$, $\mathbb{R}$ INT. ILLIMITATI

MASSIMO E MINIMO di un sottoinsieme.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, e $t \in \mathbb{R}$. Si dirà che t è massimo per A se
(1) $t \in A$, (2) $t \geq a \ \forall a \in A$
Dualmente, t si dirà minimo per A se
(1) $t \in A$, (2) $t \leq a \ \forall a \in A$.

Prop. | Il massimo di A, se esiste, è unico (si denota con $\max A$)
Idem per il minimo ($\min A$)

Dim. Siano $t_1,t_2 \in \mathbb{R}$ due massimi per A.
Poiché $t_2 \in A$ e t_1 è massimo, $t_1 \geq t_2$; idem $t_2 \geq t_1$, dunque $t_1 = t_2$ □

Il massimo (o minimo) potrebbe però non esistere: es. $A = [0,1[$ non ha max

perché ogni elem. di A è superato da qualche altro elem. di A.
Ma allora il numero 1 che cos'è per A ?

• Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, definiamo

$A^* = \{x \in \mathbb{R} : x \geq y \ \forall y \in A\}$ MAGGIORANTI di A

$A_* = \{x \in \mathbb{R} : x \leq y \ \forall y \in A\}$ MINORANTI di A

Ex. • $A = [1,4[$: $A^* = [4,+\infty[$, $A_* =]-\infty, 1]$ se fosse $A = [1,4]$ non sarebbe cambiato nulla!

• $B = \mathbb{N}$: $B^* = \emptyset$, $B_* =]-\infty, 1]$.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che A è SUPERIORMENTE LIMITATO se $A^* \neq \emptyset$
INFERIORMENTE LIMITATO se $A_* \neq \emptyset$

A si dice LIMITATO se è sia sup. che inf. limitato.

• Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sup. limitato. Definiamo allora

ESTREMO SUPERIORE di A : $\boxed{\sup A := \min A^*}$

(essendo un minimo, se esiste è unico!). Ma esiste? Sì:

Prop. | Se A è sup. lim., sup A esiste sempre.

Dim. Sia $U = A$, $V = A^*$: poiché $U \leq V$, per (C0) esiste $t \in \mathbb{R}$ t.c. $A \leq t \leq A^*$. Notiamo che (1) $t \in A^*$ perché $A \leq t$; (2) $t \leq a \ \forall a \in A^*$ perché $t \leq A^*$: dunque $t = \min A^*$. □

Ex. $A = [0,4[$: $\nexists \max A$; $A^* = [4,+\infty[\implies \sup A = \min A^* = 4$.

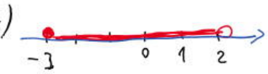
Prop. | Se $\sup A \in A$, allora $\sup A = \max A$.
Viceversa, se esiste $\max A$ allora $\max A = \sup A$

Dim. Esercizio.

Dualmente: dato $A \subseteq \mathbb{R}$ inf. limitato, si definisce

ESTREMO INFERIORE di A : $\boxed{\inf A := \max A_*}$ (è unico, esiste, etc.)

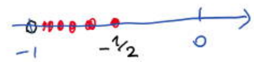
Ex. • $A = [-3,2[$: $\min A = -3$ (infatti $-3 \in A$, $-3 \leq x \ \forall x \in A$)
e dunque $\min A = \inf A$. Si ha poi $A^* = [2,+\infty[$,



dunque $2 = \min A^* = \sup A$; poiché $2 \notin A$, $\nexists \max A$.

- $A =]-\infty,-3]$: A è inf. illim. $\Rightarrow$ non ha senso parlare di inf, né min.
  $A^* = [-3,+\infty[$ $\Rightarrow$ $\sup A = -3$; $-3 \in A$ $\Rightarrow$ $-3 = \max A$.

- Talvolta però non è agevole scrivere subito i maggioranti / minoranti.
  $A = \left\{ -\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\}$



Verifichiamo che la successione $x_n = -\frac{n}{n+1}$ è decrescente:

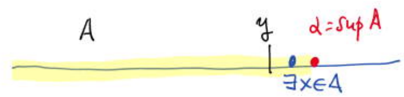
$x_{n+1} \le x_n \iff -\frac{n+1}{n+2} \le -\frac{n}{n+1} \iff (n+1)^2 \ge n(n+2) \iff 1 \ge 0$ vero!

inoltre $-1 < x_n < 0 \quad \forall n$.

Possiamo dire che $\max A = -\frac{1}{2} = x_1$: infatti $x_1 \ge x_n \ \forall n \ge 1$, $x_1 \in A$.
Dunque anche $\sup A = -\frac{1}{2}$. Quanto all'inf, in questo caso ci verrebbe da dire che $A_* =]-\infty,-1]$ (e dunque $\inf A = \max A_* = -1$), ma è davvero così?
In casi dubbi come questo, sono utili le sgg. proprietà che caratterizzano sup e inf:

Prop. (PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DEL SUP)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ sup. limitato, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $\alpha = \sup A$ se e solo se:

$$\begin{cases} (1) & x \le \alpha \quad \forall x \in A \quad (\text{ovvero } \alpha \in A^*) \\ (2) & \forall y \in \mathbb{R} \text{ t.c. } y < \alpha \ \exists x \in A : x > y \end{cases}$$



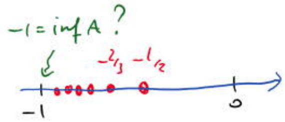
Dim. "$\Rightarrow$" (necessità) Sia $\alpha = \sup A$: mostriamo che allora valgono (1) + (2).
$\alpha = \sup A = \min A^* \Rightarrow \alpha \in A^*$, dunque vale (1).
Sia ora $y \in \mathbb{R}$, $y < \alpha$: poiché $\alpha = \min A^* \Rightarrow y \notin A^* \Rightarrow$
$\exists\, x \in A$ t.c. $x > y$, ovvero (2).

"$\Leftarrow$" (sufficienza) Supp. che α soddisfi a (1)+(2), allora mostriamo che $\alpha = \min A^*$.
Intanto $\alpha \in A^*$ grazie a (1). Sia ora per assurdo $z \in A^*$ t.c. $z \not\ge y$, ovvero $z \in A^*$ t.c. $z < y$: per (2) $\exists x \in A$ t.c. $x > z$, assurdo poiché $z \in A^*$. Pertanto $z \ge y \ \forall z \in A^*$, ovvero $y = \min A^*$. □

Per l'inf valgono le proprietà duali.
Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è inf. limitato e $\beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} (1) & \beta \le x \quad \forall x \in A \quad (\text{cioè } \beta \in A_*) \\ (2) & \forall y > \beta \ \exists x \in A : x < y \end{cases}$$

Torniamo dunque all'esempio di prima: $A=\{-\underbrace{\tfrac{n}{n+1}}_{x_n} : n\in\mathbb{N}\}$



È vero che $-1=\inf A$? Usiamo le prop. caratteristiche.

Vale (1) ? Sì, perché $-1\le x_n \iff -1\le -\frac{n}{n+1} \iff \frac{n}{n+1}\le 1 \iff n\le n+1 \iff 0\le 1$ ok

Vale (2) ? Sia $y>-1$: esiste qualche x_n t.c. $x_n<y$? Supp. che $-1<y<0$:

$$x_n=-\frac{n}{n+1}<y \iff \frac{n}{n+1}>\underbrace{-y}_{>0} \iff n>(-y)n-y \iff \underbrace{(y+1)}_{>0}n>-y$$

$$\iff n>\underbrace{\frac{-y}{y+1}}_{>0},$$ dunque da un certo punto in poi si ha $x_n<-y$

Dunque $-1=\inf A$. Poiché $-1\notin A$, $\nexists \min A$.

$\boxed{\text{ESERCIZI PER CASA}}$ Determinare max/min/sup/inf dei sgg. sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$A_1=\{e^x : x\in\mathbb{Q}_{>1}\}$ (razionali >1); $A_2=\{-5\}$; $A_3=]-\infty,1[\,\cup\{4\}$;

$A_4=\{\alpha^n : n\in\mathbb{Z}\}$ (con $\alpha\in\mathbb{R}$ parametro) discutere! ; $A_5=\left\{(-1)^n\frac{3n+1}{2n-1} : n\in\mathbb{N}\right\}$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
PROPOSTI PER CASA IL 8/10

- Siano $f(x) = x + \sqrt{x}$, $g(x) = \log(x^2 - 2x + 2)$, $h(x) = e^{\cos x}$.
Determinare il dominio delle funzioni date; comporle; calcolare le antiimmagini $f^{-1}([2,6[)$, $g^{-1}([1,+\infty[)$, $h^{-1}([1,\frac{e}{2}[)$.
Determinare le fibre di f, g, h; usare il metodo delle fibre per calcolare l'immagine $h([\pi/2, 4[)$.
Le funzioni sono iniettive? Suriettive? Renderle biiettive dopo averle opportunamente ristrette e coristrette, esibendone le funzioni inverse.

f ha dominio $[0,+\infty[$; invece g e h hanno dominio $\mathbb{R}$ (perché $x^2-2x+2>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$; e perché l'esponenziale e il coseno hanno dom. $\mathbb{R}$)

Composizioni: $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \log\left((x+\sqrt{x})^2 - 2(x+\sqrt{x}) + 2\right)$ (dominio $[0,+\infty[$),
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \log(x^2-2x+2) + \log(x^2-2x+2)$ (dominio dato da $\log(x^2-2x+2)\geq 0$, ovvero $x^2-2x+2\geq 1$, ovvero $(x-1)^2\geq 0$, sempre vero: il dominio è $\mathbb{R}$).
$(h\circ f)(x) = e^{\cos(x+\sqrt{x})}$ (dominio $[0,+\infty[$). $(f\circ h)(x) = e^{\cos x} + e^{\frac{1}{2}\cos x}$ (dom. $\mathbb{R}$).
$(g\circ h)(x) = \log\left(e^{2\cos x} - 2e^{\cos x} + 2\right)$ (dominio $\mathbb{R}$). $(h\circ g)(x) = e^{\cos(\log(x^2-2x+2))}$ (dom. $\mathbb{R}$).

Per le restanti domande esaminiamo una funzione alla volta, non rispettando necessariamente l'ordine delle domande (anche per mettere in campo varie tecniche di ragionamento).

- $f(x) = x+\sqrt{x}$.
Iniettiva? Siano $x_1, x_2 \geq 0$: da $f(x_1) = f(x_2)$ segue che $x_1 = x_2$?
$x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2} \iff \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = x_2 - x_1 \iff \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = (\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})$
$\iff (\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}) = 0 \iff \sqrt{x_2}-\sqrt{x_1} = 0 \iff x_1 = x_2$.
il fattore $1+\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ è >0 — x_1 e x_2 sono ≥ 0

Dunque f è iniettiva.
Suriettiva? Di certo no: infatti $f(x)\geq 0$, dunque ad esempio $y=-1$ è un "valore" (=elemento del codominio) non raggiunto da alcun x del dominio.
A questo punto calcoliamo le fibre di f, il che darà modo di capire qual è l'immagine di f e ne anticiperà l'inversa.
$f(x) = y \iff$ (posto $y\geq 0$) $x+\sqrt{x} = y \iff x + \sqrt{x} - y = 0 \iff \sqrt{x} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$.
(Poiché $\sqrt{x}\geq 0$, la soluzione con "−" è spuria perché negativa, e per quella col "+" devo imporre che $-1+\sqrt{1+4y}\geq 0$, ovvero $\sqrt{1+4y}\geq 1$, dunque ancora $y\geq 0$.)
$\iff x = \left(\dfrac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)^2 = 1+2y-\sqrt{1+4y}$.
Quindi le fibre di f sono $f^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y<0 \\ \{x(y) = 1+2y-\sqrt{1+4y}\} & \text{se } y\geq 0. \end{cases}$
Ne deduciamo che l'immagine di f è $[0,+\infty[$.
Essendo già f iniettiva, per renderla biiettiva basterà corestringerla alla sua immagine, ovvero $f|^{[0,+\infty[} : [0,+\infty[\xrightarrow[\sim]{} [0,+\infty[$.
E la sua inversa sarà, come trovato,

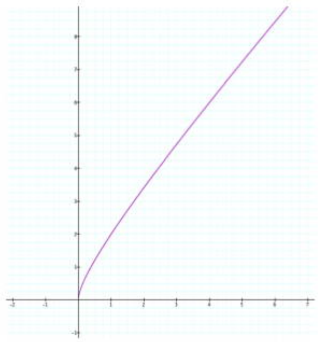
$\left(f\big|^{[0,+\infty[}\right)^{-1} : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ data da $\left(f\big|^{[0,+\infty[}\right)^{-1}(y) = x(y) = 1+2y-\sqrt{1+4y}$.

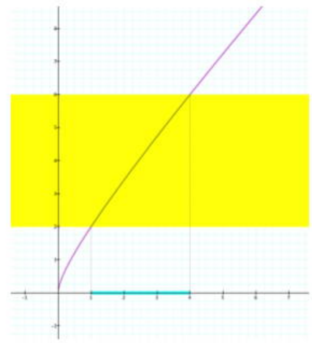
Infine, l'antiimmagine:

$f^{-1}([2,6[) = \{x \geq 0 : 2 \leq f(x) < 6\}$, ovvero le soluzioni di $\begin{cases} x+\sqrt{x} \geq 2 \\ x-\sqrt{x} < 6 \end{cases}$,

cioè $\begin{cases} (\cancel{\sqrt{x} \leq -2}) \vee (\sqrt{x} \geq 1) \\ \cancel{-3} < \sqrt{x} < 2 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} x \geq 1 \\ x < 4 \end{cases}$: risulta l'intervallo $[1,4[$.

Le seguenti figure (grafico di f e antiimmagine) illustrano il tutto:





- $g(x) = \log(x^2-2x+2)$

Che NON sia iniettiva si vede subito, notando che $f(0) = f(2) = \log 2$.

Calcoliamo comunque le fibre.

$g(x) = y \iff \log(x^2-2x+2) = y \iff x^2-2x+2 = e^y \iff x^2-2x+2-e^y = 0$

$\iff x = 1 \pm \sqrt{e^y-1}$ ma solo se $e^y-1 \geq 0$, ovvero $y \geq 0$.

Dunque le fibre sono $g^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } y<0 \\ \{1\} & \text{se } y=0 \\ \{x_1(y) = 1-\sqrt{e^y-1},\ x_2(y) = 1+\sqrt{e^y-1}\} & \text{se } y>0 \end{cases}$ ← NO SURJ! due elementi: NO INJ!

Notato che $x_1(y) < 1 < x_2(y)$, se restringiamo il dominio a $[1,+\infty[$ (in questo modo ci sbarazziamo di $x_1(y)$) la funzione diventa iniettiva (nella fibra sopravvive il solo $x_2(y)$); corestringendo poi alla sua immagine (che dalle fibre si nota essere $[0,+\infty[$) essa diventa biiettiva:

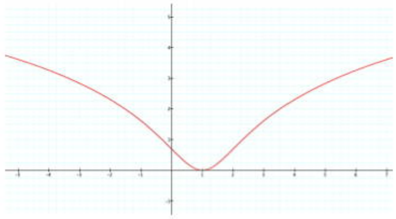
$g\big|_{[1,+\infty[}^{[0,+\infty[} : [1,+\infty[\xrightarrow{\sim} [0,+\infty[$, con inversa

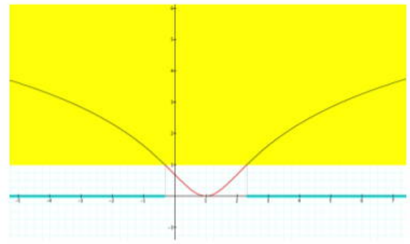
$\left(g\big|_{[1,+\infty[}^{[0,+\infty[}\right)^{-1} : [0,+\infty[\longrightarrow [1,+\infty[$ data da $x_2(y) = 1+\sqrt{e^y-1}$.

L'antiimmagine:

$g^{-1}([1,+\infty[) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq 1\}$, ovvero le soluzioni di $\log(x^2-2x+2) \geq 1$: viene $x^2-2x+2 \geq e$, cioè $x^2-2x+2-e \geq 0$: sono i valori esterni alle due radici $1 \pm \sqrt{e-1}$, cioè $]-\infty, 1-\sqrt{e-1}] \cup [1+\sqrt{e-1}, +\infty[$.

Anche qui, le seguenti figure illustrano tutto:





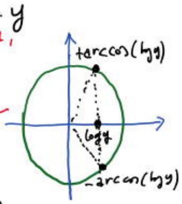
• $h(x)=e^{\cos x}$. Questa funzione eredita la periodicità (2π) dal coseno: in altre parole $h(x+2\pi)=h(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ne segue che ovviamente h non sarà iniettiva (si ripete tale e quale ogni 2π).
Inoltre da $-1\le\cos x\le 1$ e dal fatto che l'esponenziale è una funzione crescente segue che $e^{-1}\le h(x)\le e^{1}$, ovvero che l'immagine di h è contenuta in $[1/e, e]$: perciò di certo h non è nemmeno suriettiva.

Comunque sia, preso $y\in\mathbb{R}$ nel codominio calcoliamone la fibra.
$h^{-1}(y)=\{x\in\mathbb{R} : h(x)=y\}$, dunque risolviamo $e^{\cos x}=y$

si ha $e^{\cos x}=y \xRightarrow{\text{solo per } y>0} \cos x=\log y \xRightarrow{\text{solo se } -1\le\log y\le 1,\ \text{ovvero } 1/e\le y\le e}$

$\Rightarrow x=\pm\arccos(\log y)+2k\pi$ al variare di $k\in\mathbb{Z}$



Nel caso particolare di $y=1/e$ si ha $\arccos(-1)=\pi$, e dunque i due segni "$\pm$" danno gli stessi punti $\pi+2k\pi$.
Analogamente, nel caso di $y=e$ si ha $\arccos(1)=0$, e i due segni "$\pm$" danno gli stessi punti $2k\pi$.

Ricapitolando, le fibre di h sono:

$$h^{-1}(y)=\begin{cases}\emptyset & \text{se } (y<1/e)\vee(y>e)\\ \{\pi+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\} & \text{se } y=1/e\\ \{2k\pi : k\in\mathbb{Z}\} & \text{se } y=e\\ \{\pm\arccos(\log y)+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\} & \text{se } 1/e<y<e\end{cases}$$

(le fibre sono composte di un'infinità numerabile di punti del dominio, al variare di $k\in\mathbb{Z}$)

Se restringo il dominio al solo intervallo $[0,\pi]$ (che è quello cui restringo il coseno per invertirlo e ottenere l'arco-coseno) la funzione diventa iniettiva, poiché le fibre diventano al più di 1 elemento:

$$\left(h|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(y)=\begin{cases}\emptyset & \text{se } (y<1/e)\vee(y>e)\\ \{\pi\} & \text{se } y=1/e\\ \{0\} & \text{se } y=e\\ \{\arccos(\log y)\} & \text{se } 1/e<y<e\end{cases}$$

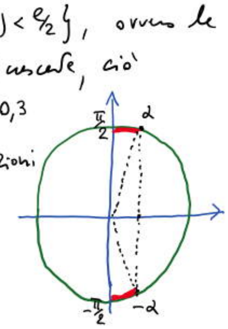
Se inoltre corestringo all'immagine $[1/e, e]$ la funzione diventa anche suriettiva, ovvero biiettiva, con inversa

$\left(h\Big|_{[0,\pi]}^{[1/e,\,e]}\right)^{-1} : [1/e, e] \to [0,\pi]$ data da $x(y) = \arccos(\log y)$.

Troviamo l'antiimmagine $h^{-1}([1, e/2[) = \{x\in\mathbb{R} : 1 \le h(x) < e/2\}$, ovvero le soluzioni di $1 \le e^{\cos x} < e/2$. Poiché il log è crescente, ciò equivale a $0 \le \cos x < \log(e/2) = \log e - \log 2 = 1 - \log 2 \sim 0{,}3$ che, posto $\alpha := \arccos(1-\log 2) \sim 1{,}26$ radianti, dà le soluzioni

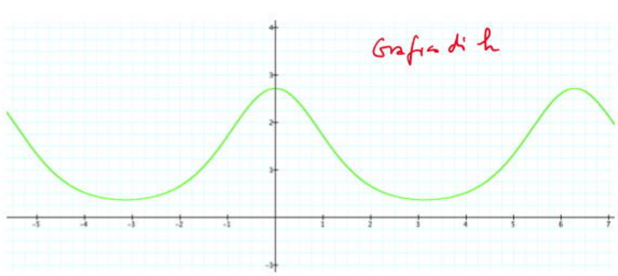
$$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\alpha+2k\pi\right[\ \cup\ \left]\alpha+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$$

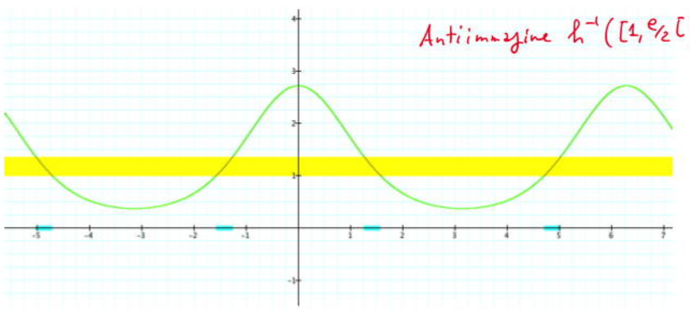
al variare di $k\in\mathbb{Z}$ (unione infinita di intervalli).



Passiamo infine al calcolo dell'immagine $h([\frac{\pi}{2},4[)$.
Per farlo usiamo il metodo della fibra.
Un certo y nel codominio di h starà in $h([\pi/2,4[)$ se e solo se nella sua fibra sta qualche punto dell'intervallo $[\pi/2, 4]$ del dominio.
Guardando le fibre di h calcolate prima, vedo che $y=1/e$ ci sta (infatti $1/e = h(\pi)$, con $\pi \in [\pi/2,4[$) mentre $y=e$ non ci sta (infatti $e = h(2k\pi)$ con $k\in\mathbb{Z}$, e nessuno dei $2k\pi$ sta in $[\pi/2,4[$).
Quanto a un generico y con $1/e<y<e$, gli elementi della sua fibra sono $\pm\arccos(\log y)+2k\pi$ al variare di $k\in\mathbb{Z}$: poiché l'arco-coseno ha valori tra 0 e π (ovvero $0\le\arccos(z)\le\pi \ \ \forall |z|\le 1$), i soli elementi della fibra che possono sperare di stare nell'intervallo $[\pi/2,4[$ sono $\arccos(\log y)$ (col segno $+$ e con $k=0$) e $2\pi-\arccos(\log y)$ (col segno $-$ e con $k=1$), pertanto gli $y\in[1/e,e]$ che funzionano sono dati da
$\left(\frac{\pi}{2} \le \arccos(\log y) \underset{\text{(ovvio)}}{\cancel{<4}}\right) \vee \left(\underset{\text{(ovvio)}}{\cancel{\frac{\pi}{2}<}}\, 2\pi - \arccos(\log y) < 4\right)$ ovvero, applicando cos,
$\left(0 \underset{\text{cos decresce su }[0,\pi]}{\ge} \log y\right) \vee \left(\log y \underset{\text{cos cresce su }[\pi,2\pi]}{<} \cos 4\right)$, ovvero $(y\le 1)\vee(y<e^{\cos 4}\sim 0{,}5) = (y\le 1)$.
Tenendo presente che $y\in[1/e,e]$, l'immagine cercata è dunque $[1/e, 1]$.

Le seguenti figure illustrano tutti i risultati ottenuti per h.




Antiimmagine $h^{-1}([1, e/2[)$

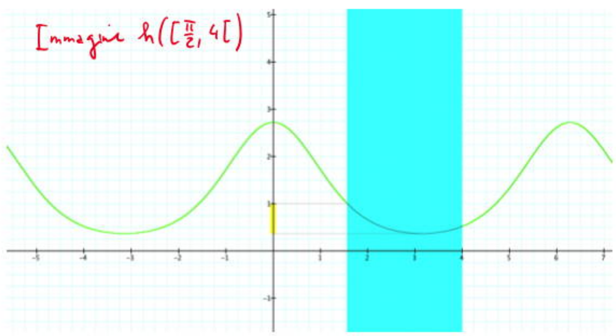


Immagine $h([\frac{\pi}{2}, 4[)$