Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)
Autoverifica su prerequisiti - insiemi - numeri reali

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

martedì 14 ottobre 2014

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito lunedì 20/10). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 20 pt (5×4 pt). **Ex. 2:** 15 pt (3×5 pt). **Ex. 3:** 10 pt (2×5 pt). **Ex. 4:** 30 pt (2×15 pt). **Ex. 5:** 25 pt (5+5+7+8 pt). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. Risolvere le seguenti disequazioni nella variabile $x \in \mathbb{R}$, eventualmente al variare di $\lambda > 0$:

$$\frac{|x-5|-|1-x^2|}{|x+1|-3} < 1; \quad \lambda \sin(2x) < \cos x; \quad \frac{2\,\mathrm{tg}\, x - 3}{\sqrt{2}\cos x + 1} \le 0; \quad \log\left(\frac{1-2x}{x+1}\right) \le 2; \quad x - e^{2x} + \lambda \ge 0.$$

2. Disegnare i luoghi $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2(x+2y),\, x+1 > |y|\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2 > y,\, |x-y| < 1\}$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < \sqrt{x+2y},\, 3\,\mathrm{arctg}\,(y-x) < \pi\}$.

3. Usando il principio di induzione, provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale:

(a) la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali dà $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(b) $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos((2n-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$.

4. (a) Sia $A = \mathbb{R}_{>0} =]0,+\infty[$, e sia $g : A \to \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}}$. Discutere iniettività e suriettività di g. Calcolare $g^{-1}(]-2, \frac{7}{2}])$. Calcolare la fibra $g^{-1}(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, e dedurne cosa siano $g([\frac{1}{4}, 3[)$ e l'immagine di g. Restringendo e corestringendo opportunamente g per renderla biiettiva, calcolarne la funzione inversa.

(b) Stesse domande per $h : A \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = 2\sqrt{x} - x + 3$.

5. Dire (dimostrandolo, eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$) se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono limitati superiormente e/o inferiormente oppure no, e calcolarne, ove possibile, sup/inf e max/min.

$$A_1 = ([-\pi, 0[\, \cup [-1,+\infty[) \cap \mathbb{Q}_{\ge -4}; \qquad A_2 = \{-4 + \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\};$$

$$A_3 = \mathbb{Z}_{\ge -2} \cap [\alpha, +\infty[; \qquad A_4 = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x - x^2 > 0\} \cup \{n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}.$$

Soluzioni.

1. $\boxed{\frac{|x-5|-|1-x^2|}{|x+1|-3}<1}$ Per l'esistenza della disequazione bisogna che $|x+1| \neq 3$, ovvero $x+1 \neq 3$ (cioè $x \neq 2$) e $x+1 \neq -3$ (cioè $x \neq -4$). Esaminiamo ora i contenuti dei moduli. Si ha $x-5 \geq 0$ se e solo se $x \geq 5$; poi $1-x^2 \geq 0$ se e solo se $-1 \leq x \leq 1$; infine $x+1 \geq 0$ se e solo se $x \geq -1$. Dunque distinguiamo quattro casi. (a) Se $x \leq -1$, si ottiene $\frac{(5-x)-(x^2-1)}{(-x-1)-3}<1$, da cui $\frac{x^2-10}{x+4}<0$. Vale $x^2-10>0$ per $x<-\sqrt{10}$ oppure $x>\sqrt{10}$, e $x+4>0$ per $x>-4$: pertanto $\frac{x^2-10}{x+4}<0$ se e solo se $x<-4$ oppure $-\sqrt{10}<x<\sqrt{10}$. Dovendo però essere $x \leq -1$, le soluzioni accettabili sono $x<-4$ oppure $-\sqrt{10}<x<-1$. (b) Se $-1<x \leq 1$, si ottiene $\frac{(5-x)-(1-x^2)}{(x+1)-3}<1$, da cui $\frac{x^2-2x+6}{x-2}<0$. Poiché il numeratore è sempre positivo, ciò equivale a $x-2<0$, ovvero $x<2$. Dovendo però essere $-1 \leq x<1$, le soluzioni accettabili sono $-1 \leq x<1$. (c) Se $1 \leq x<5$, si ottiene $\frac{(5-x)-(x^2-1)}{(x+1)-3}<1$, da cui $\frac{x^2+2x-8}{x-2}>0$. Vale $x^2+2x-8>0$ per $x<-4$ oppure $x>2$, e $x-2>0$ per $x>2$: dunque $\frac{x^2+2x-8}{x-2}>0$ se e solo se $-4<x<2$ oppure $x>2$. Dovendo però essere $1 \leq x<5$, le soluzioni accettabili sono $1 \leq x<2$ e $2<x<5$. (d) Infine, se $x \geq 5$ si ottiene $\frac{(x-5)-(x^2-1)}{(x+1)-3}<1$, da cui $\frac{x^2+3}{x-2}>0$. Il numeratore è sempre >0, e (poiché $x \geq 5$) lo è anche il denominatore: si ottengono dunque le soluzioni accettabili $x \geq 5$. Le soluzioni della nostra disequazione si ottengono unendo quelle dei quattro casi, dunque esse sono $x<-4$ oppure $x>-\sqrt{10}$ ma $x \neq 2$.

$\boxed{\lambda \sin(2x)<\cos x}$ La disequazione si può scrivere $(2\lambda \sin x-1)\cos x<0$. In $[-\pi, \pi]$ si ha $\cos x>0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; quanto a $2\lambda \sin x-1>0$, se $\lambda=0$ si ottiene $-1>0$ che è sempre falso, mentre se $\lambda>0$ si ottiene $\sin x>\frac{1}{2\lambda}$. Ora, se $\frac{1}{2\lambda} \geq 1$ (ovvero se $0<\lambda \leq \frac{1}{2}$) ciò è impossibile, mentre se $\frac{1}{2\lambda}<1$ (ovvero se $\lambda>\frac{1}{2}$) ciò vale per $\arcsin \frac{1}{2\lambda}<x<\pi-\arcsin \frac{1}{2\lambda}$. Ricapitolando, se $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$ si ha $(2\lambda \sin x-1)\cos x<0$ se e solo se $\cos x>0$, ovvero se e solo se $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$; se invece $\lambda>\frac{1}{2}$ si ha $(2\lambda \sin x-1)\cos x<0$ se e solo se $-\frac{\pi}{2}<x<\arcsin \frac{1}{2\lambda}$ oppure $\frac{\pi}{2}<x<\pi-\arcsin \frac{1}{2\lambda}$. Per le soluzioni generali basterà aggiungere $2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) agli estremi.

$\boxed{\frac{2\operatorname{tg} x-3}{\sqrt{2}\cos x+1} \leq 0}$ Per l'esistenza della tangente bisognerà che $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, e per il denominatore dovrà essere $\cos x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero $x \neq \pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Il maggiore dei periodi presenti è 2π, dunque risolviamo ad esempio in $[-\pi, \pi]$. Il numeratore è >0 se e solo se $\operatorname{tg} x>\frac{3}{2}$: questa, risolta in $[-\pi, \pi]$, dà $-\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}<x<-\frac{\pi}{2}$ oppure $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. Il denominatore è >0 se e solo se $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ che, risolta in $[-\pi, \pi]$, dà $-\frac{3\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$. Si ha dunque $\frac{2\operatorname{tg} x-3}{\sqrt{2}\cos x+1} \leq 0$ se e solo se $-\frac{3\pi}{4}<x \leq -\pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ oppure $-\frac{\pi}{2}<x \leq \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$ oppure $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}$. Per le soluzioni generali, basta aggiungere $2k\pi$ (ove $k \in \mathbb{Z}$) agli estremi.

$\boxed{\log\left(\frac{1-2x}{x+1}\right) \leq 2}$ Per l'esistenza del logaritmo bisognerà che $\frac{1-2x}{x+1}>0$, ovvero che $-1<x<\frac{1}{2}$. Applicando l'esponenziale naturale ad ambo i membri si ottiene $\frac{1-2x}{x+1} \leq e^2$, da cui $\frac{(e^2+2)x+e^2-1}{x+1} \geq 0$. Il numeratore è >0 per $x>-\frac{e^2-1}{e^2+2}$, il denominatore è >0 per $x>-1$; poiché $-1<-\frac{e^2-1}{e^2+2}$, la frazione è ≥ 0 per $x<-1$ oppure $x \geq -\frac{e^2-1}{e^2+2}$. Tenendo presente però la condizione di esistenza $-1<x<\frac{1}{2}$, si ottengono le soluzioni accettabili $-\frac{e^2-1}{e^2+2} \leq x<\frac{1}{2}$.

$\boxed{x-e^{2x}+\lambda \geq 0}$ Posto $u=2x$, la disequazione diventa $e^u \leq \frac{1}{2}u+\lambda$. Confrontando i grafici dell'esponenziale e^u e di $\frac{1}{2}u+\lambda$, è chiaro che esiste un certo[(1)] $\lambda_0 \in]0,1[$ tale che per $0<\lambda<\lambda_0$ la disequazione sia priva di soluzioni, e per $\lambda \geq \lambda_0$ si abbia $u_0 \leq u \leq u_1$ per due opportuni $u_0 \leq u_1$ funzioni di λ (trattandosi di una disequazione mista, il calcolo preciso di tali funzioni è impossibile), dunque $\frac{1}{2}u_0 \leq x \leq \frac{1}{2}u_1$.

2. $\boxed{A=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2(x+2y),\ x+1>|y|\}}$ (Vedi Figura 1) La condizione $x^2+y^2 \leq 2(x+2y)$ designa i punti interni alla circonferenza (compresa) $x^2+y^2-2x-4y=0$, mentre $x+1>|y|$ è l'angolo acuto di vertice $(-1,0)$ e semirette $y=\mp(x+1)$ (vertice e semirette escluse); l'insieme A ne è l'intersezione.

$\boxed{B=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2>y,\ |x-y|<1\}}$ (Vedi Figura 2) La condizione $x+y^2>y$ designa i punti esterni alla parabola (esclusa) $x=-y^2+y=0$, mentre $|x-y|<1$ è la striscia obliqua racchiusa tra le rette $y=x\mp 1$; l'insieme B ne è l'intersezione.

[(1)] in realtà, se solo sapessimo usare le derivate (ma per ora non le conosciamo e non proveremo mai a usarle prima del tempo, vero?), sarebbe facile calcolare che $\lambda_0=\frac{1+\log 2}{2} \sim 0{,}85$.

$\boxed{C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < \sqrt{x+2y},\, 3 \operatorname{arctg}(y-x) < \pi\}}$ (Vedi Figura 3) Dovrà essere $x + 2y \geq 0$, dunque vanno considerati i soli punti sopra la retta $x + 2y = 0$. In tale ipotesi iniziale, la disequazione $x < \sqrt{x+2y}$ è sempre soddisfatta se $x < 0$, mentre se $x \geq 0$ essa equivale a $x^2 < x+2y$, ovvero a $y > \frac{1}{2}(x^2-x)$, i punti sopra la parabola $y = \frac{1}{2}(x^2 - x)$ (esclusa). La condizione $3 \operatorname{arctg}(y - x) < \pi$ equivale a $\operatorname{arctg}(y - x) < \frac{\pi}{3}$, da cui $y - x < \sqrt{3}$, ovvero $y < x + \frac{\pi}{3}$ (i punti sotto la retta $y = x + \frac{\pi}{3}$, esclusa).

3. $\boxed{1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ Per $n = 1$ ciò è vero (infatti $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$); supposto che lo sia per un certo $n \geq 1$, mostriamo che lo è anche per il successivo $n + 1$. In effetti, sfruttando l'ipotesi induttiva si ottiene $1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + \cdots + n^2) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)) = (n+1)(\frac{2n^2+7n+6}{6}) = (n+1)(\frac{(n+2)(2n+3)}{6}) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, come si voleva.

$\boxed{\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos((2n-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x}}$ Per $n = 1$ è vero (infatti $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$); supposto che lo sia per un certo $n \geq 1$, mostriamo che lo è anche per il successivo $n + 1$. Sfruttando l'ipotesi induttiva e le formule di prostaferesi (all'indietro) si ha $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos((2n-1)x) + \cos((2(n+1)-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x} + \cos((2n+1)x) = \frac{1}{2 \sin x}(\sin(2nx) + 2\cos((2n+1)x) \sin x) = \frac{1}{2 \sin x}(\sin(2nx) + \sin(2(n+1)x) - \sin(2nx)) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{2 \sin x}$, come si voleva.

4. I risultati di questo esercizio si comprenderanno meglio osservando l'andamento grafico di g e h (Figura 4).

(a) Siano $x_1, x_2 > 0$ tali che $g(x_1) = g(x_2)$, ovvero $\sqrt{\frac{x_1+2}{x_1}} = \sqrt{\frac{x_2+2}{x_2}}$: allora $\frac{x_1+2}{x_1} = \frac{x_2+2}{x_2}$, da cui $x_1x_2 + 2x_2 = x_1x_1 + 2x_1$, da cui $x_1 = x_2$. Dunque g è iniettiva. D'altra parte, poiché $g(x) > 0$ per ogni $x \in A$, la funzione g non è suriettiva. Si ha poi $g^{-1}(]-2, \frac{7}{2}]) = \{x > 0 : -2 < \sqrt{\frac{x+2}{x}} \leq \frac{7}{2}\}$: poiché la radice (quando esiste) è ≥ 0, si tratta di trovare gli $x > 0$ tali che $\sqrt{\frac{x+2}{x}} \leq \frac{7}{2}$, ovvero $\frac{x+2}{x} \leq \frac{49}{4}$, ovvero $x \geq \frac{8}{45}$. Dunque $g^{-1}(]-2, \frac{7}{2}]) = [\frac{8}{45}, +\infty[$. Calcoliamo ora la fibra $g^{-1}(y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, ovvero risolviamo $g(x) = y$ nell'incognita $x > 0$. Poiché $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x}} \geq 0$, dovrà essere anche $y \geq 0$: in questa ipotesi, si ricava $\frac{x+2}{x} = y^2$, da cui $x + 2 = xy^2$, da cui $(y^2 - 1)x = 2$. Poiché $x > 0$, dovrà essere anche $y^2 - 1 > 0$, ovvero (tenendo presente che già abbiamo richiesto $y > 0$) bisogna che $y > 1$: in tali ipotesi si ha $x = \frac{2}{y^2-1}$. Pertanto, se $y \leq 1$ si ha $g^{-1}(y) = \varnothing$, mentre se $y > 1$ si ha $g^{-1}(y) = \{\frac{2}{y^2-1}\}$. Ne deduciamo che l'immagine di g è $B = [1, +\infty[$, e che la funzione inversa $g^{-1} : B \to A$ è data da $g^{-1}(x) = \frac{2}{x^2-1}$. Quanto a $g([\frac{1}{4}, 3[)$, si tratta di chiedere che $\frac{1}{4} \leq \frac{2}{y^2-1} < 3$, che (tenuto conto che $y > 1$) equivale a $\frac{\sqrt{15}}{3} < y \leq 3$: dunque $g([\frac{1}{4}, 3[) =]\frac{\sqrt{15}}{3}, 3]$.

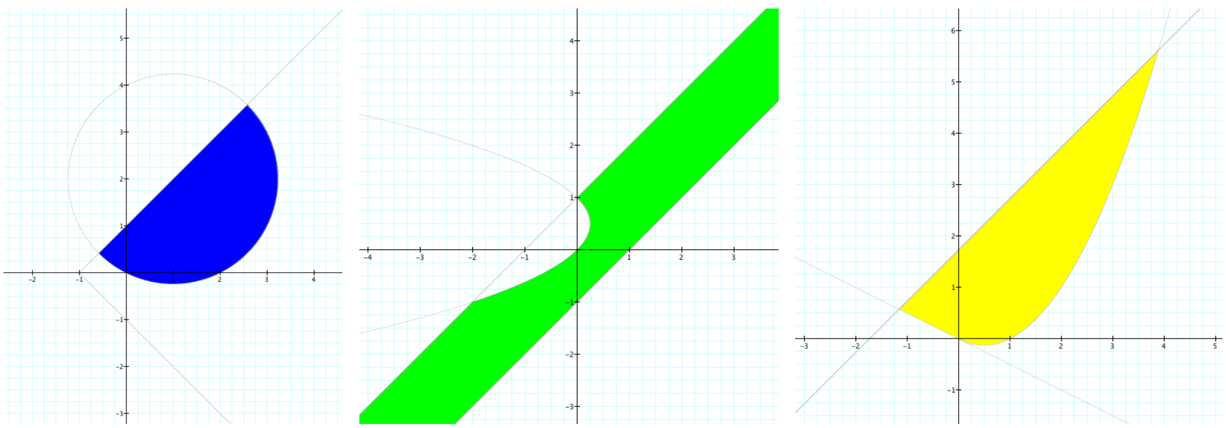
(b) Siano $x_1, x_2 > 0$ tali che $h(x_1) = h(x_2)$, ovvero $2\sqrt{x_1} - x_1 + 3 = 2\sqrt{x_2} - x_2 + 3$: allora $2(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}) = x_1 - x_2$, da cui (essendo $x_1 - x_2 = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$) si ha $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} - 2) = 0$: si noti che, oltre al caso $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = 0$ (che equivale a $x_1 = x_2$) si presenta anche il caso $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$, soddisfatto ad esempio da $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$ (si noti che, infatti, $h(0) = h(4) = 3$). Dunque h non è iniettiva. Per rispondere circa la suriettività, cerchiamo fin d'ora di rispondere alla domanda sulla fibra. Dato $y \in \mathbb{R}$, la fibra di h in y è data dagli $x > 0$ tali che $2\sqrt{x} - x + 3 = y$, ovvero $x - 2\sqrt{x} + y - 3 = 0$. Posto $t = \sqrt{x} \geq 0$ si ottiene $t^2 - 2t + y - 3 = 0$, che ammette soluzioni $t = 1 \pm \sqrt{4-y}$ solo quando $y \leq 4$ (dunque h non è suriettiva); di queste, se $y < 3$ la sola positiva è $t = 1 + \sqrt{4-y}$ (da cui $x = (1 + \sqrt{4-y})^2$) mentre se $3 \leq y \leq 4$ sono positive entrambe $t = 1 \pm \sqrt{4-y}$ (da cui i due valori $x = (1 \pm \sqrt{4-y})^2$). Ricapitolando, per $y > 4$ la fibra $h^{-1}(y)$ è vuota; per $3 \leq y \leq 4$ è data dai due elementi $\{x_1(y) = (1 - \sqrt{4-y})^2, x_2(y) = (1 + \sqrt{4-y})^2\}$ (che per $y = 4$ coincidono in $x = 1$ e per $y = 3$ danno $\{0, 4\}$); per $y < 3$ è data dal solo elemento $\{x(y) = (1 + \sqrt{4-y})^2\}$ (si noti che $x(y) > 4$) Si nota dunque che, restringendo il dominio di h a $x \in]4, +\infty[$ e il codominio a $y \in]-\infty, 3[$ la funzione $h|_{]4,+\infty[}^{]-\infty,3[}$ diventa biiettiva, con inversa data da $\{x(y) = (1 + \sqrt{4-y})^2\}$. Da quanto appena detto, l'immagine di h risulta $]-\infty, 4]$ (ovvero, tutti gli $y \in \mathbb{R}$ con fibra non vuota); l'immagine $h([\frac{1}{4}, 3[)$ è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi $\begin{cases} y \leq 4 \\ \frac{1}{4} \leq (1 + \sqrt{4-y})^2 < 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3 \leq y \leq 4 \\ \frac{1}{4} \leq (1 - \sqrt{4-y})^2 < 3 \end{cases}$, ovvero $]2\sqrt{3}, 4] \cup [\frac{15}{4}, 4] =]2\sqrt{3}, 4]$. Ci resta solo da calcolare $h^{-1}(]-2, \frac{7}{2}]) = \{x \geq 0 : -2 < 2\sqrt{x} - x + 3 \leq \frac{7}{2}\}$, che, posto $t = \sqrt{x} \geq 0$, equivale al sistema dato da $-\frac{1}{2} \leq t^2 - 2t < 5$ con $t \geq 0$, da cui $0 \leq t \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ o $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t < 1 + \sqrt{6}$, e perciò, elevando al quadrato, $h^{-1}(]-2, \frac{7}{2}]) = [0, \frac{3}{2} - \sqrt{2}] \cup [\frac{3}{2} + \sqrt{2}, 7 + 2\sqrt{6}[$.

5. $\boxed{A_1 = ([-\pi, 0[\cup [-1, +\infty[) \cap \mathbb{Q}_{\geq -4}}$ Il sottoinsieme A_1 è costituito da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $-\pi \leq x < 0$ oppure $x \geq -1$ (dunque, da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \geq -\pi$) che però stanno anche in $\mathbb{Q}_{\geq -4}$, ovvero che sono numeri razionali ≥ -4. Poiché $-\pi > -4$ e $-\pi$ è irrazionale, ne concludiamo che A_1 è costituito da tutti gli $x \in \mathbb{Q}$ tali che $x > -\pi$: dunque A_1 è inferiormente limitato (un suo minorante è, ad esempio, -5) ma superiormente illimitato (e dunque non ammette ne' sup ne' max). Si ha $\inf A_1 = -\pi$: infatti $-\pi$ è un minorante, e se $-\pi < x$ si può sempre trovare qualche numero razionale $\frac{m}{n}$ tale che $-\pi < \frac{m}{n} < x$ (infatti $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$). Poiché $-\pi \notin A_1$, il $\min A_1$ non esiste.

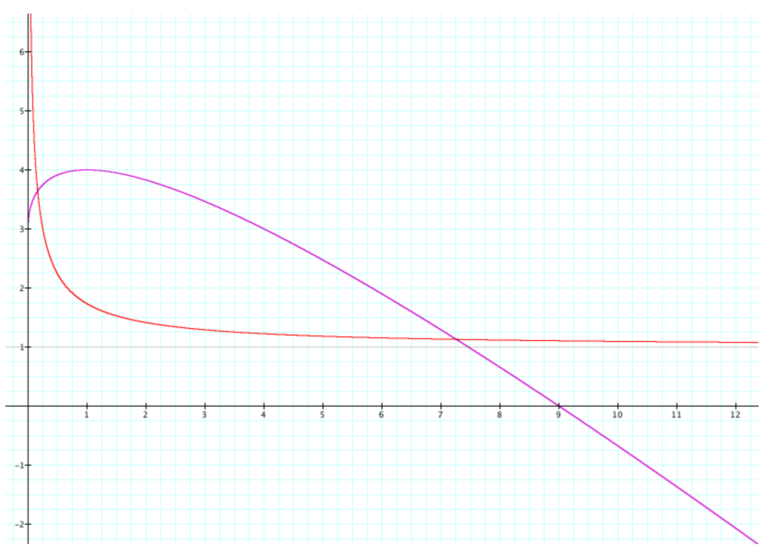
$\boxed{A_2 = \{-4 + \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}}$ Facendo variare n in $\mathbb{N}$, si ottiene la descrizione estensiva $A_2 = \{-4-\frac{1}{2}, -4+\frac{1}{3}, -4-\frac{1}{4}, -4+\frac{1}{5}, -4-\frac{1}{6}, -4+\frac{1}{7}, \dots\}$. È dunque chiaro che $\min A_2 = -4-\frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$ (infatti sta in A_2, ed è $\leq$ di tutti gli altri elementi) e che $\max A_2 = -4+\frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$ (infatti sta in A_2, ed è $\geq$ di tutti gli altri elementi). Sarà perciò $\inf A_2 = \min A_2 = -\frac{9}{2}$ e $\sup A_2 = \max A_2 = -\frac{11}{3}$.

$\boxed{A_3 = \mathbb{Z}_{\geq -2} \cap [\alpha, +\infty[}$ A_3 è fatto dai numeri interi ≥ -2 che però sono anche $\geq \alpha$. Dunque, se $\alpha \leq -2$ si ha $A_3 = \mathbb{Z}_{\geq -2} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, inferiormente (un minorante è ad esempio -8) ma non superiormente limitato: in tal caso si ha chiaramente $\min A_3 = \inf A_3 = -2$, mentre $\sup A_3$ e $\max A_3$ non esistono. Se invece $\alpha > -2$, nel caso $\alpha \in \mathbb{Z}$ si ha $A_3 = \mathbb{Z}_{\geq \alpha}$, dunque $\min A_3 = \inf A_3 = \alpha$ mentre $\sup A_3$ e $\max A_3$ non esistono; invece nel caso $\alpha \notin \mathbb{Z}$ si ha $A_3 = \mathbb{Z}_{\geq ([\alpha]+1)}$ (si ricorda che $[\alpha]$ denota la parte intera di α, cioè l'intero che precede α), dunque $\min A_3 = \inf A_3 = [\alpha]+1$ mentre $\sup A_3$ e $\max A_3$ non esistono.

$\boxed{A_4 = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x - x^2 > 0\} \cup \{n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}}$ La disequazione $4 - x - x^2 > 0$ è verificata per $\frac{-1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. D'altra parte, facendo crescere $n = 1, 2, \dots$ in $\mathbb{N}$, si ha che il numero positivo n^α cresce da 1 verso l'infinito se $\alpha > 0$; è sempre $= 1$ se $\alpha = 0$; parte da 1 e decresce verso 0 se $\alpha < 0$. Pertanto, unendo i due insiemi, per ogni α si ha che $\inf A_4 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ e $\min A_4$ non esiste; quanto invece a $\sup A_4$ e $\max A_4$, se $\alpha > 0$ essi non esistono, mentre se $\alpha \leq 0$ si ha $\sup A_4 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ e $\max A_4$ non esiste (infatti $\frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 1$).



(1)-(2)-(3) Gli insiemi A, B, C dell'esercizio 2.



(4) I grafici delle funzioni g (rosso) e h (porpora) dell'esercizio 4.