ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

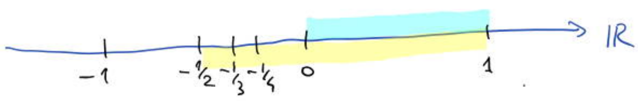
Lezione di martedì 14/10/2014

DENSITA'

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $A \subseteq I$.

Si dirà che A è <u>denso</u> in I se $\forall x, y \in I$ con $x<y$ $\exists t \in A$ t.c. $x<t<y$.
(comunque presi due elementi di I c'è sempre qualche elemento di A che si infila tra essi)

$\boxed{Ex}$ $A = \mathbb{N}$ è denso in $I = \mathbb{R}$? No! Es.: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$
$A = [0,1]$ è denso in $I =]-\frac{1}{2}, 1]$? No! Es: $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{4}$



Definiamo: • $\tilde{\mathbb{Q}} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ numeri irrazionali.

• PARTE INTERA $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
Dato $x \in \mathbb{R}$, l'immagine $[x]$ è il più grande $r \in \mathbb{Z}$ t.c. $r \leq x$.
$\boxed{Ex}$ $[-7] = -7$, $[-3/2] = -2$, $[2{,}71] = 2$

• PARTE FRAZIONARIA $\mathrm{frac} : \mathbb{R} \to [0,1[$ $\quad \mathrm{frac}(x) := x - [x]$
$\boxed{Ex}$ $\mathrm{frac}(3) = 0$; $\mathrm{frac}(7/5) = 0{,}4 = 2/5$
$\mathrm{frac}(-2/3) = -\frac{2}{3} - (-1) = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$
(Es.: se $x>0$, $\mathrm{frac}(x)$ è la parte decimale di x)

Lemma (Archimedeità di $\mathbb{R}$)
- Se $x, y \in \mathbb{R}$ con $x>0$, allora $\exists n \in \mathbb{N} : nx > y$
- Se $x, y \in \mathbb{R}$ con $x>1$, allora $\exists n \in \mathbb{N} : x^n > y$

Dim. Supponiamo per assurdo che la prima tesi non sia vera: ovvero che $\exists \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ con $\tilde{x} > 0$: $n\tilde{x} \not> \tilde{y}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ovvero $n\tilde{x} \leq \tilde{y}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Se così fosse l'insieme $\mathbb{N}\tilde{x} = \{n\tilde{x} : n \in \mathbb{N}\}$ sarebbe sup. limitato (perché $\tilde{y} \in (\mathbb{N}\tilde{x})^* \neq \emptyset$) $\Longrightarrow$ esso dovrebbe ammettere il sup, sia $x_0 := \sup(\mathbb{N}\tilde{x})$. Per la seconda propr. caratt. del sup, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $n_0\tilde{x} > x_0 - \tilde{x}$ (perché $x_0 - \tilde{x} < x_0$, dunque dovrà essere superato da qualche elemento di $\mathbb{N}\tilde{x}$)
$\Longrightarrow x_0 < (n_0+1)\tilde{x}$. Assurdo! Perché x_0 è maggiorante di $\mathbb{N}\tilde{x}$.
La seconda asserzione si dimostra in modo analogo (con "$\cdot$" al posto di "$+$"). □

Prop. | $\mathbb{Q}$ e $\tilde{\mathbb{Q}}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

Dim. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x<y$. Tesi: $\exists \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : x < \frac{m}{n} < y$.
Poiché $y - x > 0$, di certo $\exists n \in \mathbb{N} : n(y-x) > 1$ (lemma!)
ovvero $y - x > 1/n$. Poniamo $m := [nx] + 1$: dunque

vale $[nx] \le nx < m \Rightarrow \frac{[nx]}{n} \le x < \frac{m}{n}$.

Si ha poi $y = x + (y-x) > x + \frac{1}{n} \ge \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \Rightarrow y > \frac{m}{n}$

e ci siamo. Dunque $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

La densità di $\tilde{\mathbb{Q}}$ si fa discendere subito da quella di $\mathbb{Q}$.

Infatti sia α un qualsiasi irrazionale >0 (es: $\alpha = \sqrt{2}, \pi, e, \ldots$)

Poiché $x/\alpha < y/\alpha$, sia $m'/n' \in \mathbb{Q}$ t.c. $x/\alpha < m'/n' < y/\alpha$

$\Rightarrow x < \frac{m'}{n'}\alpha < y$ $\quad$ D'altra parte, se $m' = 0$ allora

$\in \tilde{\mathbb{Q}}$ se $m' \neq 0$.

$x < 0 < y$; sia $n'' \in \mathbb{N}$ t.c. $n''y > \alpha$ (Lemma!) $\Rightarrow y > \frac{\alpha}{n''}$ □

$\boxed{\text{Ex}}$

- Trovare un razionale tra $x = \sqrt{17}$ e $y = 3\sqrt{2}$.

  Si può ripercorrere pari pari la dimostrazione; oppure

  $\sqrt{17} < \frac{m}{n} < 3\sqrt{2} \iff 17n^2 < m^2 < 18n^2$.

  Per $n=1$ viene $17 < m^2 < 18$, e non si riesce;

  $n=2$ viene $68 < m^2 < 72$, idem;

  $n=3$ viene $153 < m^2 < 162$, idem;

  $n=4$ viene $272 < m^2 < 288$, idem

  $n=5$ viene $425 < m^2 < 450 \leadsto m = 21$ $\quad$ $21/5$

- Trovare degli irrazionali tra $1/4$, $1/3$ e $1/2$.

  $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

  Sennò, altro metodo:

  $2 < \,?\, < 3 < \,?\, < 4$; $\quad 4 < 7 < 9 < 11 < 16$;

  passando alle radici quadrate e poi ai reciproci

  si ottiene $\frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{11}} < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2}$.

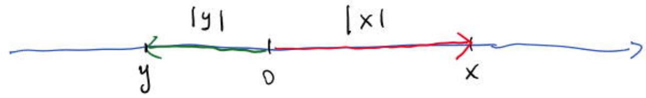
TOPOLOGIA DELLA RETTA REALE $\mathbb{R}$

Iniziamo con alcune definizioni.

- INTERVALLO APERTO: un intervallo che non contiene alcuno dei suoi estremi, ovvero del tipo $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $\mathbb{R}$.

• **Modulo**: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Il modulo è la nozione di "norma" (ovvero: "lunghezza vettoriale") in $\mathbb{R}$ nel senso EUCLIDEO, che è quello di uso comune.



Tale norma soddisfa a tre proprietà interessanti:

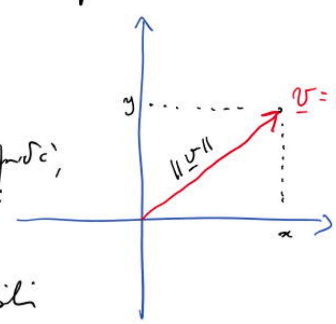
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ disug. triangolare

Queste sono le 3 proprietà cui in generale deve soddisfare una "norma", ovvero una buona nozione di "lunghezza" in uno spazio vettoriale:

ad es., in $\mathbb{R}^2$ se io definisco

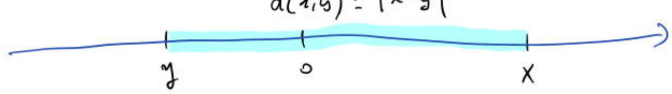
$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$ ("norma euclidea")

anche tale norma soddisfa alle suddette proprietà, anche se non è la sola possibile nozione di norma (ad es.: $\|v\|_2 := |x| + |y|$ o anche $\|v\|_3 := \max(|x|, |y|)$ sono altre due possibili norme su $\mathbb{R}$).



Tornando comunque a $\mathbb{R}$, dalla nozione di modulo (ovvero norma euclidea) ricavo subito una nozione di DISTANZA:

$d(x,y) = |x-y|$



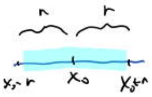
che soddisfa:

- $d(x,y) > 0 \ \forall x \neq y$, e $d(x,x) = 0 \ \forall x$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

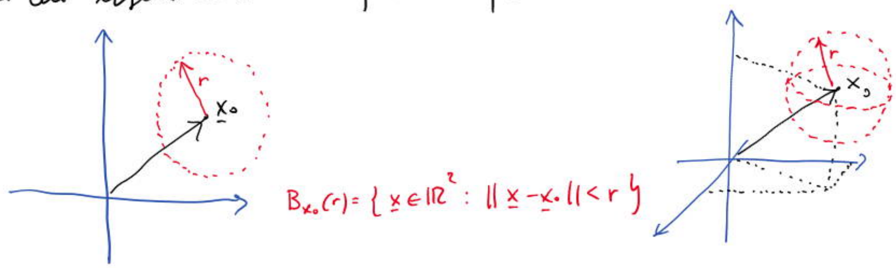
Con questa nozione di distanza, $\mathbb{R}$ è quello che si dice uno "spazio metrico".

• PALLA (ingl. "ball") Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$

$B_{x_0}(r) := \,]x_0 - r, x_0 + r[\, = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r \}$ PALLA APERTA DI CENTRO x_0 E RAGGIO r



Il termine "palla" si usa per analogia con i casi pluridimensionali, in cui effettivamente viene fuori una palla:



$\overline{B}_{x_0}(r) := \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r \} = [x_0 - r, x_0 + r]$ PALLA CHIUSA

$B^+_{x_0}(r) := \{ x \in \mathbb{R} : x \geq x_0 ,\ x - x_0 < r \} = [x_0, x_0 + r[$ SEMIPALLA DX (IDEM SX)

• Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

A si dirà APERTO (in $\mathbb{R}$) (in senso euclideo) se si può esprimere come unione di intervalli aperti.
(in più, per def, anche $\emptyset$ è aperto)

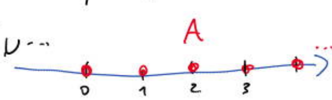
A si dirà CHIUSO (in $\mathbb{R}$) quando $\complement_{\mathbb{R}} A := \mathbb{R} \setminus A$ è un aperto.

A si dirà COMPATTO se è sia chiuso che limitato.

$\boxed{\text{Ex.}}$

• $A = \,]a,b[$ è ovviamente aperto; idem tutti gli altri interv. aperti.

• $A = \mathbb{N}$ è chiuso perché $\complement_{\mathbb{R}} \mathbb{N} = \,]-\infty, 0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,2[\,\cup \dots$ è aperto.



• Si dimostra che gli unici chiusaperti di $\mathbb{R}$ sono lo stesso $\mathbb{R}$ e $\emptyset$.

• $A = \mathbb{Q}$ non può essere aperto (se contenesse un intervallo $]a,b[$, vorrebbe dire che $]a,b[$ sarebbe formato di soli punti razionali, falso perché $\tilde{\mathbb{Q}}$ è denso in $\mathbb{R}$) e idem per $B = \tilde{\mathbb{Q}}$. Dunque entrambi non sono né aperti né chiusi.

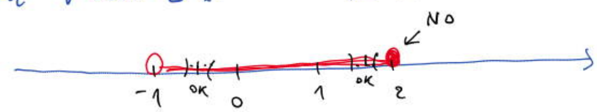
• $A = \{ x_1, \dots, x_m \}$ (sottoinsieme FINITO) è chiuso (il complem. è aperto) e limitato dunque è un compatto.

Ma anche $[0,1]$ è compatto (pur essendo un insieme infinito).

Prop. (CRITERIO DI APERTURA) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Allora

A è aperto $\iff$ A contiene una palla aperta centrata in ogni suo punto, cioè $\forall x \in A \ \exists r_x > 0 : B_x(r_x) \subseteq A$

($\boxed{\text{Ex.}}$ $A :=]-1,2]$ non è aperto (non contiene alcuna palla aperta centrata in $x=2$))

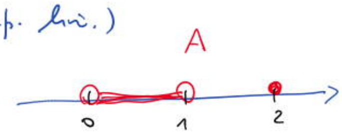


Dim. "$\Longrightarrow$" Sia A aperto, dunque $A = \bigcup_{j \in J} I_j$ ← intervalli aperti e sia $x \in A$. Di certo $\exists\, j_0 \in J$ t.c. $x \in I_{j_0}$, e di certo $\exists\, r > 0$ t.c. $]x-r, x+r[\subset I_{j_0}$ (che è intervallo aperto). Dunque ok.

"$\Longleftarrow$" Supponiamo che $\forall x \in A \ \exists r_x > 0$ t.c. $B_x(r_x) \subseteq A$. Allora $A = \bigcup_{x \in A} B_x(r_x)$, ovvero A è aperto. $\square$

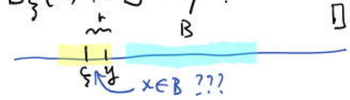
Cor. Ogni sottoinsieme non vuoto, chiuso e inferiormente limitato di $\mathbb{R}$ ha sicuramente minimo. Idem per max (sup. lim.)

($\boxed{\text{Ex.}}$ $A :=]0,1[\cup \{2\}$ non è chiuso perché è inf. lim. ma non ha minimo (inf. $= 0$). Ma nemmeno aperto (non contiene alcuna palla centrata in $x=2$).)



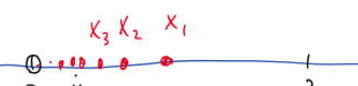
Dim. Sia $B \neq \emptyset$, chiuso e inf. lim. di $\mathbb{R}$. Di certo esiste $\inf B =: \xi$: supponiamo per assurdo che $\xi \notin B$. Allora $\xi \in \mathbb{R} \setminus B =: A$ che è aperto: dunque $\exists\, r > 0$ t.c. $B_\xi(r) \subseteq A$, ovvero t.c. $B_\xi(r) \cap B = \emptyset$. $\square$

Ma ciò nega la 2a propr. caratt. dell'inf:



$\boxed{\text{Ex.}}$

- $A := [-5,2[$ non è aperto (non contiene palle centrate in -5) né chiuso (è sup. lim. ma $\nexists$ max).
- $B = \left\{ \underbrace{\frac{2n+3}{n+1}}_{x_n} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots \right\}$



Verifichiamo che x_n è decrescente:

$x_{n+1} < x_n \iff \dfrac{2(n+1)+3}{(n+1)+1} < \dfrac{2n+3}{n+1} \iff (2n+5)(n+1) < (2n+3)(n+2)$

$\iff \cancel{2n^2}+\cancel{7n}+5 < \cancel{2n^2}+\cancel{7n}+6 \iff 5<6$ vero!

Inoltre $x_n > 2 \iff \dfrac{2n+3}{n+1} > 2 \iff \cancel{2n}+3 > \cancel{2n}+2 \iff 3>2$ vero!

Abbiamo $x_1 = 5/2 = \max B$ (perché $x_1 \in B$, $x_1 \geq x_n \ \forall n$) $\Rightarrow x_1 = \sup B$.

Inoltre $\inf B = 2$ (infatti $2 \leq B$, e inoltre dato un $y > 2$, supp. $2<y<3$,

si ha $x_n < y \iff \dfrac{2n+3}{n+1} < y \iff 2n+3 < ny+y \iff n\underbrace{(y-2)}_{>0} > 3-y$

$\iff n > \dfrac{3-y}{y-2}$ >0, dopo da un certo n in poi ciò è vero.)

Poiché $2 = \inf B$, ma $2 \notin B \Rightarrow \nexists \min B \Rightarrow B$ non è chiuso.

Inoltre non è aperto (non contiene alcuna palla centrata in alcuno degli x_n).

Se invece fosse $B' := B \cup \{2\}$ allora B' sarebbe chiuso perché [B' è apert.

- Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che A è un INTORNO di x_0 se A contiene un aperto contenente x_0.
  Ovvero, se A contiene una palla aperta centrata in x_0, cioè se $\exists\, r>0$ t.c. $B_{x_0}(r) \subseteq A$. ovvero: A "abbraccia" x_0

Prop. | A è intorno di $x_0 \iff A$ contiene qualche palla aperta centrata in x_0.

Dim. Esercizio. $\square$

$\boxed{\text{Ex.}}$ $A =]-\infty,-1] \cup \{0\} \cup]2,+\infty[$

Di quali punti è intorno A? Di tutti i punti di $]-\infty,-1[\ \cup \ ]2,+\infty[$

Nota Se A è intorno di x_0, ovviamente $x_0 \in A$.

- La famiglia delle palle centrate in x_0, ovvero $\{B_{x_0}(r) : r>0\}$ si dice BASE DI INTORNI di x_0 (oppure FAMIGLIA FONDAMENTALE DI INTORNI di x_0): ogni intorno di x_0 ne contiene uno di base.

- Si dice che una proprietà $P(x)$ VALE (è vera) ALL'INTORNO DI x_0 se $A = \{x \in \mathbb{R} : P(x) \text{ è vera}\}$ è un intorno di x_0.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $P(x)$: "$|x|>2$". $A =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, dunque ad es.
$P(x)$ è vera all'intorno di $x_0 = 5$ oppure di $x_0 = -7$.

Per quanto visto, possiamo affermare quanto segue:

Prop. | $A \subseteq \mathbb{R}$ è aperto $\iff$ A è intorno di ogni suo punto

Sottolineo questo fatto per far capire che

(ASSEGNARE GLI APERTI DI $\mathbb{R}$) $\iff$ (ASSEGNARE GLI INTORNI PER OGNI PUNTO DI $\mathbb{R}$)

nel senso che, anziché aver fatto come prima:

(APERTI: unioni di intervalli aperti) $\rightsquigarrow$ (INTORNI DI x_0: quelli che contengono qualche aperto contenente x_0)

avremmo potuto fare

(INTORNI di x_0 = quelli che contengono qualche intervallo aperto contenente x_0) $\rightsquigarrow$ (APERTI: quelli che sono intorno di ogni loro punto)

In sostanza: la conoscenza degli aperti equivale alla conoscenza degli intorni per ciascun punto.

TOPOLOGIA di $\mathbb{R}$:= famiglia di tutti gli aperti di $\mathbb{R}$
(nel caso della TOPOLOGIA "EUCLIDEA", gli aperti sono quelli ottenuti da unioni di intervalli aperti: ma non sarà l'unica nozione possibile di topologia ...)

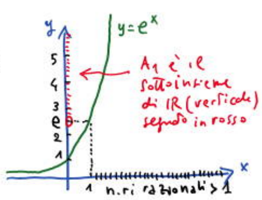
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI PER CASA IL 13/10

$\boxed{\text{ESERCIZI PER CASA}}$, Determinare max / min / sup / inf dei sgg. sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$A_1 = \{ e^x : x \in \mathbb{Q}_{>1} \}$ (razionali > 1) ; $\quad A_2 = \{-5\}$; $\quad A_3 = \,]-\infty, 1[\, \cup \{4\}$;

$A_4 = \{ \alpha^n : n \in \mathbb{Z} \}$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$ parametro) (discutere!) ; $\quad A_5 = \left\{ (-1)^n \dfrac{3n+1}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

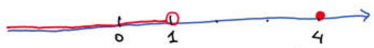
- A_1 :



A_1 non è sup. lim. : $e^x > M \gg 0 \iff x > \log M$
dunque non ha senso cercare max e sup.
Vediamo che $\inf(A_1) = e$ usando le proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore.
Intanto e è un minorante di A_1 (perché l'esponenziale è crescente, dunque se $x > 1$ vale $e^x > e^1 = e$), dunque la prima proprietà è soddisfatta. Quanto alla seconda, dobbiamo mostrare che ogni $y > e$ lascia dietro qualche elemento di A_1 : in effetti se $y > e$ allora vale $e^x < y \iff x < \log y$, e poiché $\log y > 1$ basta scegliere x t.c. $1 < x < \log y$.
Pertanto $\inf(A_1) = e$; ma poiché $e \notin A_1$, il minimo di A_1 non esiste.

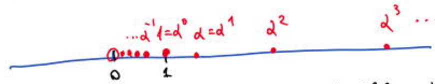
- A_2

Qui è tutto chiaro : $\max(A_2) = -5$ (perché $-5 \in A_2$ e $-5 \geq$ se stesso!), dunque anche $\sup(A_2) = -5$ (se il max esiste, esso è anche il sup).
Per lo stesso motivo $\min(A_2) = \inf(A_2) = -5$.

• A_3 

Di certo $4 = \max(A_3)$ (perché $4 \in A_3$ e $4 \geq x \ \forall x \in A_3$), e anche $= \sup(A_3)$.
D'altra parte A_3 è inf. illimitato, dunque non ha senso cercare inf/min.

• A_4 Dividiamo alcuni casi.

$\underline{\alpha > 1}$ 

← (Fare il disegno per esempio per $\alpha = 2$

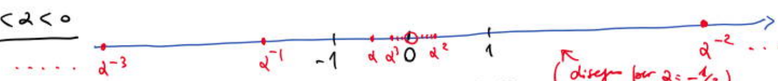
Non ci sono max/sup (A_4 è sup. illim.).
Si ha poi $0 = \inf(A_4)$: infatti 0 è minorante (essendo $\alpha^n > 0 \ \forall n$), e, se $y > 0$, per il Lemma di Archimedeità esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\alpha^n > 1/y$, da cui, passando ai reciproci, $\alpha^{-n} < y$. ($-n \in \mathbb{Z}$)

$\underline{\alpha = 1}$ In questo caso $A_4 = \{1\}$, dunque $\max(A_4) = \min(A_4) = 1$.

$\underline{0 < \alpha < 1}$ L'insieme è fatto allo stesso modo del caso $\alpha > 1$, solo che stavolta le potenze che salgono sono quelle con $n < 0$ e quelle che scendono verso 0^+ sono quelle con $n > 0$.
Le conclusioni sono le stesse di prima.

$\underline{\alpha = 0}$ $A_4 = \{0\}$, dunque $\max(A_4) = \min(A_4) = 0$.

$\underline{-1 < \alpha < 0}$

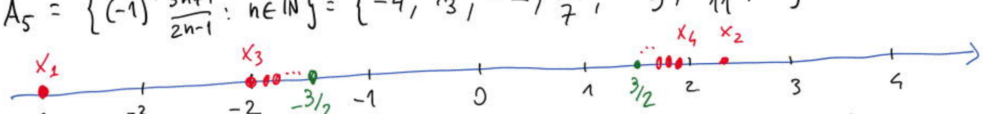


L'insieme è sia sup. che inf. illimitato, dunque non ha senso cercare nulla.

$\underline{\alpha = -1}$ $A_4 = \{-1, 1\}$: $\max(A_4) = 1$, $\min(A_4) = -1$.

$\underline{\alpha < -1}$ L'insieme è fatto come nel caso $-1 < \alpha < 0$, con i segni delle potenze invertiti. Dunque anche qui non ha senso cercare nulla.

• $A_5 = \left\{ (-1)^n \frac{3n+1}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -4, \frac{7}{3}, -2, \frac{13}{7}, -\frac{16}{9}, \frac{19}{11}, \ldots \right\}$



Chiamiamo $x_n := (-1)^n \frac{3n+1}{2n-1}$: tutti i punti di questa successione distano più di $3/2$ dall'origine (infatti $|x_n| = \frac{3n+1}{2n-1} > \frac{3n}{2n} = 3/2$) e saltellano tra la sinistra di $-3/2$ (per n dispari) e la destra di $3/2$ (per n pari).
Inoltre all'aumentare di n i punti si avvicinano sempre più all'origine (pur restando sempre a distanza $> 3/2$): infatti dati $m > n$ si ha $|x_m| < |x_n| \iff \frac{3m+1}{2m-1} < \frac{3n+1}{2n-1} \iff 6mn + 2n - 3m - 1 < 6mn + 2m - 3n - 1$
$\iff m > n$ (vero!). Pertanto $\min(A_5) = x_1 = -4$ e $\max(A_5) = x_2 = 7/3$.