ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 15/10/2014

Come si comportano aperti, chiusi e intorni rispetto a unione e intersezione?

Prop
- Unioni qualunque di aperti sono ancora aperte
- Intersezioni finite di aperti sono ancora aperte

Risultati duali valgono per i chiusi:

- Unioni finite di chiusi sono ancora chiuse
- Intersezioni qualunque di chiusi sono ancora chiuse.

Per gli intorni di un certo $x_0 \in \mathbb{R}$ valgono gli stessi risultati degli aperti.

Ex $A_n = \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= B_0\left(\frac{1}{n}\right) \rightsquigarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ non è più aperto (è un chiuso)

$B_n = \left[\frac{1}{n}, \frac{2n}{n+1}\right] \rightsquigarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n =]0,2[$ che non è più chiuso

Dim. · Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$.
Mostriamo che anche $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.
Sia dunque $x_0 \in A$, e mostriamo che $\exists\, r > 0 : B_{x_0}(r) \subset A$.
Ora, di certo $\exists\, \bar{i} \in I : x_0 \in A_{\bar{i}}$ che è aperto: dunque $\exists\, r > 0$: $B_{x_0}(r) \subset A_{\bar{i}} \subset A$, e ci siamo.

· Siano $A_1, \dots, A_m$ una famiglia finita di aperti di $\mathbb{R}$.
Mostriamo che anche $A := A_1 \cap \dots \cap A_m$ è aperto.
Sia dunque $x_0 \in A$, e mostriamo che $\exists\, r > 0 : B_{x_0}(r) \subset A$.
Ora abbiamo che $x_0 \in A_j \ \forall j = 1, \dots, m$, e poiché gli A_j sono aperti, esisteranno $r_j > 0 : B_{x_0}(r_j) \subset A_j$.
Basta porre $r := \min\{r_1, \dots, r_m\} > 0$ perché $r_1, \dots, r_m$ sono finiti e tutti > 0.

Per gli intorni si possono usare le stesse dimostrazioni.
Per i chiusi idem, usando le seguenti identità insiemistiche:

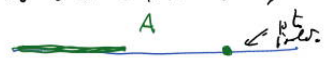
$$\complement_X\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} \complement_X A_i \quad , \quad \complement_X\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \complement_X A_i \qquad \square$$

Ex · $A = \{1, 5, 8, 27\}$ è un chiuso perché unione finita di chiusi (un punto $\{x_0\}$ è un chiuso di $\mathbb{R}$)

· $A = \mathbb{Z}$ è un chiuso, ma non potremmo dirlo usando le Prop. (l'abbiamo dimostrato ieri con la definizione!)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che:

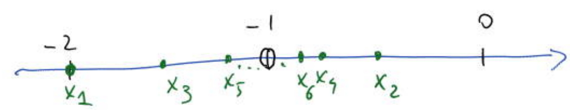
- x_0 è un **PUNTO INTERNO** di A se A è intorno di x_0 (A "avvolge" x_0)
- x_0 è un **PUNTO DI ACCUMULAZIONE** per A se $(U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ $\forall U$ intorno di x_0
  (posso avvicinarmi quanto voglio a x_0 stando in A ma senza saltarci sopra)
- x_0 è un **PUNTO DI CHIUSURA** (o **DI ADERENZA**) per A se $U \cap A \neq \emptyset$ $\forall U$ intorno di x_0
  (stare in A oppure essere di accumulazione per A)
- x_0 è un **PUNTO ISOLATO** di A se $x_0 \in A$ e $\exists U$ intorno di x_0 t.c. $U \cap A = \{x_0\}$
  (sta in A ma vicino a lui non ci sono altri punti di A)



- x_0 è un **PUNTO DI FRONTIERA** per A se è di chiusura sia per A che per $\complement A = \mathbb{R} \setminus A$.

$\boxed{\text{Ex.}}$

- $A = [-5, 2[$. Pti interni: quelli di $]-5, 2[$. Pti di chiusura: quelli di $[-5, 2]$ e sono tutti di accumulazione. Punti isolati: nessuno. Pti di frontiera: $-5, 2$
- $B = \left\{ -1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ (con $x_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n}$)



$\max B = x_2 = -1/2$ $\quad \min B = x_1 = -2$.
Punti interni: nessuno. Pti di chiusura: $B \cup \{-1\}$. Accum.: solo -1.
Pti isolati: quelli di B. Pti di frontiera: tutti e soli quelli di chiusura.

Prop. | x_0 è di chiusura per A $\Leftrightarrow$ x_0 è di accumulazione per A oppure è pto isolato di A (possibilità incompatibili)

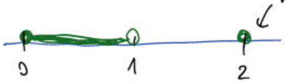
Dim. Esercizio

Un paio di nozioni e osservazioni.

Prop. | Se A è superiormente limitato, allora $\sup A$ è un punto di chiusura per A (dunque se $\sup A \notin A$, ovvero se $\nexists \max A$, allora $\sup A$ è di accumulazione per A)

$\boxed{\text{Es.}}$

- $A = [0, 1[\cup \{2\}$



$\max A = \sup A$ è di chiusura (è isolato!)

- $B = [0, 1]$: $\max B = \sup B = 1$ è di chiusura (è di accum!)
- $C = [0, 1[$: $\nexists \max C$, $\sup C = 1$ è di chiusura (è di accum.!)

Dim. Se $\xi = \sup A$ non fosse di chiusura, vorrebbe dire che
$\exists\, U$ intorno di ξ t.c. $U \cap A = \emptyset$ ma questo negherebbe la 2a propr. caratt. $\square$

Prop. | $A \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso $\iff$ A contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

Dim. A non è chiuso $\iff$ $\complement A$ non è aperto $\iff$ $\exists\, x_0 \in \complement A$ t.c. $\forall U$ int. di x_0
vale $U \not\subseteq \complement A$, ovvero $U \cap A \neq \emptyset$ $\iff$ $\exists\, x_0$ t.c. $x_0 \notin A$, ma
$\forall U$ int. di x_0 vale $U \cap A \neq \emptyset$ $\iff$ esiste qualche punto di accum.
per A che non appartiene ad A. $\square$

ESERCIZI PER CASA Determinare max, min, sup, inf, pti interni, di chiusura, accumulazione, isolati, di frontiera dei seguenti sottoinsiemi:

$A_1 = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$, $A_2 = \left\{ x \neq 0 : \cos\left(2 - \frac{1}{x}\right) = -1 \right\}$, $A_3 = \widetilde{\mathbb{Q}}$,

$A_4 = \left]-\infty, -1\right] \cup \{0\} \cup \left]2, +\infty\right[$, $A_5 = \{ e^x : x \in \mathbb{Q}_{>1} \}$,

$A_6 = \{ x \in \mathbb{R} : \cos 2x > \alpha \} \cup \{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x+1|} > 1 - x \}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$