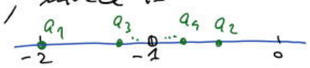
ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di lunedì 20/10/2014

$A \subseteq \mathbb{R}$ si dirà **DISCRETO** se è formato da punti isolati.
Per quanto detto poco fa, un eventuale punto di accumulazione per un insieme discreto <u>non può</u> appartenere all'insieme stesso.

$\boxed{Ex}$ • $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $B = \{\overbrace{-1 + \frac{(-1)^n}{n}}^{a_n} : n \in \mathbb{N}\}$ (ultimo ex.) sono insiemi discreti.
I primi due non hanno punti di accumulazione in $\mathbb{R}$; invece B ha -1 come accumulazione, e si noti che $-1 \notin B$.



• $B' = B \cup \{-1\}$ (ultimo ex.) non è discreto perché -1 non è pto isolato.

RETTA REALE ESTESA $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Ad $\tilde{\mathbb{R}}$ viene esteso solo l'ordine totale, nel senso che $-\infty < x < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$; invece <u>non</u> voglio estendere le operazioni di $\mathbb{R}$.

Voglio "assegnare una topologia" anche a $\tilde{\mathbb{R}}$: per quanto detto in una delle scorse lezioni, mi basta assegnare gli intorni di $-\infty$ e di $+\infty$.

Si dirà che $A \subseteq \tilde{\mathbb{R}}$ è **INTORNO DI $-\infty$** se A contiene una semiretta inf. illimitata, del tipo $[-\infty, a[$ con $a \in \mathbb{R}$.
La famiglia delle semirette $\{[-\infty, a[\, : a \in \mathbb{R}\}$ è la **BASE** (euclidea) **DI INTORNI DI $-\infty$**. Stesso discorso per $+\infty$ (con le semirette sup. illimitate)

<u>Abuso di linguaggio</u>: si usa dire che una semiretta $]-\infty, a[$ è un "intorno di $-\infty$ in $\mathbb{R}$".

Le definizioni di punto interno, ... restano le stesse di prima.
Notiamo che:

<u>Prop.</u> | Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora
$-\infty$ è di accumulazione per A (in $\tilde{\mathbb{R}}$) $\iff$ A è inferiormente illimitato.

Dim. Dire che $-\infty$ è di accumulazione per A equivale a dire che $\forall U$ intorno di $-\infty$ vale $(U \setminus \{-\infty\}) \cap A \neq \emptyset$,
ovvero $\forall a \in \mathbb{R}$ vale $]-\infty, a[\cap A \neq \emptyset$,
ovvero $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists x \in A$: $x < a$, ovvero A è inf. illimitato. $\square$

Prop. $\tilde{\mathbb{R}}$ è uno spazio topologico "separato" (o "di Hausdorff")
ovvero $\forall x, y \in \tilde{\mathbb{R}}$ con $x \neq y$ $\exists U$ int. di x, V int. di y : $U \cap V = \emptyset$.

Dim. Sia ad esempio $x < y$. Allora di cert. $\exists q \in \mathbb{R}$: $x < q < y$.
Allora $U =]-\infty, q[$, $V =]q, +\infty[$. $\square$

COSA VUOL DIRE "ASSEGNARE A UN INSIEME X UNA TOPOLOGIA"?
(ovvero: cosa vuol dire "spazio topologico"?)

Sia X un insieme, e sia $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X.
τ si dice essere una TOPOLOGIA su X se soddisfa le sgg. tre proprietà:

(a) $X, \emptyset \in \tau$
(b) unioni qualsiasi di elementi di τ stanno in τ,
(c) intersezioni finite di elem. di τ stanno in τ.

Ad esempio: se $X = \mathbb{R}$ e $\tau = \{$ unioni di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ $\}$, abbiamo visto che τ è una topologia su $\mathbb{R}$ (detta "topologia euclidea")

Altre topologie possibili su $\mathbb{R}$ sono ad esempio le seguenti:

- $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ è una topologia: si chiama TOPOLOGIA DISCRETA (tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono aperti: è la topologia più ricca)
- $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ è pure una topologia: si chiama TOPOLOGIA BANALE (i soli aperti sono $\mathbb{R}$ e $\emptyset$: è la topologia più povera, essenziale)

- Diciamo che i chiusi di $\mathbb{R}$ siano i sottoinsiemi finiti $\{x_1, \dots, x_m\}$ di $\mathbb{R}$, (gli aperti sono i complementari di insiemi finiti)
dunque $\tau = \{ A : A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \}$ TOPOLOGIA DI ZARISKI

Queste tre topologie avrebbero senso anche per un qualsiasi insieme X al posto di $\mathbb{R}$.

Cambiare la topologia su $\tilde{\mathbb{R}}$ (ma anche su un insieme qualunque) significa stravolgere la nozione di vicinanza che si intende usare: dato $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, ricordo che gli intorni di x_0 sono i sottoinsiemi di $\tilde{\mathbb{R}}$ "che contengono qualche aperto contenente x_0". Dunque:

- Se considero la top. euclidea, gli intorni di x_0 sono quelli che contengono qualche palla aperta centrata in x_0 (oppure, se $x_0 = \pm\infty$, una semiretta)
- Se considero la top. discreta, per essere intorno di x_0 basta contenere il punto x_0. ← perché qui $\{x_0\}$ è un aperto!
- Se considero la top. banale, l'unico intorno di x_0 è $\tilde{\mathbb{R}}$.
- Se considero la top. Zariski, per essere intorno di x_0 bisogna essere tutto $\tilde{\mathbb{R}}$ meno un insieme finito di punti diversi da x_0.

(Più ricca/povera è la topologia – ovvero più/meno sono gli aperti –, più/meno numerosi saranno gli intorni.)

Alterare la famiglia degli intorni avrà conseguenze pesanti sulle nozioni che coinvolgono gli intorni (convergenza di successioni, limiti, continuità ...).

(Tuttavia nella pratica di questo corso noi su $\mathbb{R}$ useremo sempre e solo la topologia euclidea!)

$\boxed{\text{ESERCIZI PER CASA}}$ Descrivere i sgg. sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ e dire per ciascuno di essi (giustificando le risposte) se è sup/inf limitato, determinandone sup/inf/max/min; se è aperto, chiuso, compatto, discreto; di quali punti di $\tilde{\mathbb{R}}$ è intorno; quali punti di $\mathbb{R}$ sono interni, di aderenza (= chiusura), di accumulazione, isolati, di frontiera.

$B_1 = \{ x \in \mathbb{R} : \log|x| + x(x-\alpha) > 0 \} \cup \{ x > 0 : \sin\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0 \}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$B_2 = \{ \alpha^n - 1 : n \in \mathbb{N} \} \cup \left(\{ x \in \mathbb{R} : 1 + \operatorname{tg}(3x) \le 0 \} \cap [\tfrac{1}{2}, 2] \right)$ al variare di $\alpha \geq 0$

$B_3 = \{ x \leq 0 : 6 \arcsin\left(2x + \frac{1}{3}\right) < \pi \} \cup \{ x \in \mathbb{R} : \log(x-1) \in \mathbb{Z} \}$

$B_4 = \{ x \in \mathbb{R} : x < \operatorname{tg} x \} \cap \exp^{-1}([-2, 3])$ ← antiimmagine tramite la funzione esponenziale $f(x) = e^x$

$B_5 = \{ y \in \mathbb{R} : y = x^2 - x,\ 0 < \log(x+2) < 1 \} \cup \{ n \in \mathbb{Z} : \sqrt{|n+2|} + n \geq 0 \}$

SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

Una SUCCESSIONE in $\mathbb{R}$ è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Di solito, anziché $a(n)$ si scrive a_n INDICE TERMINE n-ESIMO

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $a_n = \dfrac{1}{n}$ significa $a_1 = 1,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1/3,\ \dots$

• $a_n = -7 \quad \forall n$: SUCC. COSTANTE (con valore costante -7)

Con le successioni incontriamo per la prima volta la nozione di "limite".

Siano $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione, $l \in \tilde{\mathbb{R}}$. Si dice che

l è LIMITE per a_n (o che a_n TENDE A l, scriviamo $\boxed{\lim a_n = l}$ opp. $\boxed{a_n \to l}$)
se $\forall U$ intorno di l $\exists n_U \in \mathbb{N} : a_n \in U \quad \forall n \geq n_U$, ovvero, come si dice,
se la successione entra "definitivamente" in ogni intorno di l.

(In generale diremo che una proposizione $P(n)$ vale "definitivamente" se vale da un certo indice in poi.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $P(n) =$ " $2n - 57 > 0$ " è defin. vera, perché lo è $\forall n \geq 29$.

- Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che la successione CONVERGE a l (se $l = 0$: è INFINITESIMA)
- Se $l = +\infty$ (opp. $l = -\infty$), si dice che DIVERGE a $+\infty$ (o $-\infty$)
- Una successione priva di limite si dirà INDETERMINATA.

Nel caso di topologia euclidea (che useremo sempre!) la definizione di "limite" si specifica come segue:

- Se $l \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.
- Se $l = +\infty$: $\forall M > 0 \ \exists n_M \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \geq n_M$.
- Se $l = -\infty$: $\forall M > 0 \ \exists n_M \in \mathbb{N} : a_n < -M \quad \forall n \geq n_M$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ La successione $a_n = 1/n$ ha limite?

- Nel caso euclideo, $l=0$ è limite. Infatti, preso un $\varepsilon > 0$, si ha che $|a_n - 0| = |1/n| = 1/n < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon$, dunque definitivamente (si prende $n_\varepsilon = [1/\varepsilon]+1$)

- Nel caso discreto (tutti i sottoinsiemi di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono aperti), $\{0\}$ è anch'esso un intorno di $l=0$, e bisognerebbe che fosse $a_n \in \{0\}$ da un certo n in poi, ovvero $a_n = 0$ definitivamente: ma ciò è falso. Idem per ogni altro candidato limite: in questo caso a_n sarebbe indeterminata

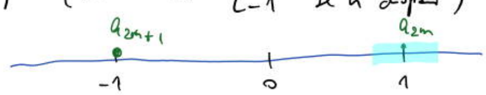
  (In generale, più ricca è la topologia più difficile è avere limite: bisogna entrare definitivamente in molti più intorni!)

- Nel caso banale (i soli aperti di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono $\tilde{\mathbb{R}}$ e $\emptyset$), preso un qualsiasi $l \in \tilde{\mathbb{R}}$ il suo unico intorno è $\tilde{\mathbb{R}}$ e la successione vive in $\tilde{\mathbb{R}}$, dunque c'è sempre dentro. Quindi ogni $l \in \tilde{\mathbb{R}}$ è limite per $a_n = 1/n$.
  Stessa cosa (esercizio) accade per la top. di Zariski

  (In generale, più povera è la topologia più facile è avere limite, anche non unico.)

D'ora in poi lavoreremo (salvo avviso contrario) sempre con la top. euclidea.

$\boxed{\text{Ex.}}$ La succ. $a_n = (-1)^n$ (ovvero $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$) è indeterminata (in euclideo).



Un fatto importante è

Prop. | Il limite, se esiste (in $\tilde{\mathbb{R}}$) è unico. (stra palese in top. euclidea!)

Dim Siano per assurdo l_1 e l_2 due limiti diversi per una successione a_n.
Sappiamo che $\tilde{\mathbb{R}}$ (con la top. euclidea) è uno spazio separato:
esistono un intorno V_1 di l_1 e un intorno V_2 di l_2 t.c. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Per def. di limite, esisteranno $\begin{cases} n_{V_1} \in \mathbb{N} : a_n \in V_1 \quad \forall n \geq n_{V_1} \\ n_{V_2} \in \mathbb{N} : a_n \in V_2 \quad \forall n \geq n_{V_2} \end{cases}$.

Allora detto $\bar{n} := \max\{n_{V_1}, n_{V_2}\}$, si ha che
$\forall n \geq \bar{n}$ vale $a_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$: assurdo! Dunque $l_1 = l_2$. □

$\boxed{Ex}$ Verifichiamo qualche limite.

- $a_n \equiv K$ (costante) converge a K. Infatti $|a_n - K| \equiv 0$, dunque $< \varepsilon$ da subito.

(−2/3 è il candidato naturale: quando n cresce molto, ...)

- $a_n = \dfrac{2n-1}{5-3n}$ converge a $-\frac{2}{3}$. Infatti, preso $\varepsilon > 0$ si ha

$$\left|a_n - \left(-\tfrac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{2n-1}{5-3n} + \frac{2}{3}\right| \overset{n\geq 2}{=} \frac{|\cancel{6n} - 3 + 10 - \cancel{6n}|}{3(3n-5)} = \frac{7}{3(3n-5)} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{3(3n-5)}{7} > \frac{1}{\varepsilon} \iff 3n-5 > \frac{7}{3\varepsilon} \iff n > \frac{\frac{7}{3\varepsilon}+5}{3}$$, vero definitivamente.

- $a_n = \dfrac{n^2}{1-n}$ (con $n \geq 2$) diverge a $-\infty$. Vero?

Tesi: $\forall M > 0 \ \exists n_M \in \mathbb{N} : a_n < -M \quad \forall n \geq n_M$

Si dunque $M > 0$. Si ha che

$$a_n = \frac{n^2}{1-n} < -M \iff \frac{n^2}{n-1} > M \iff n^2 - Mn + M > 0 \iff$$

$$\cancel{\left(n < \frac{M - \sqrt{M^2-4M}}{2}\right)} \vee \left(n > \frac{M + \sqrt{M^2-4M}}{2}\right)$$, vero definitivamente.

SOTTOSUCCESSIONE (o SUCCESSIONE ESTRATTA)

Data una successione a_n e una funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente si definisce $b_k := a_{\nu(k)}$. La successione $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ si dice "sottosuccessione" di a_n, ed è costituita scegliendo solo alcuni termini (infiniti) di a_n.

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & \ldots \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow & \ldots\uparrow\ldots \\ & b_1 & & b_2 & b_3 & & & b_4 & \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ \nu(1) = 2 \\ \nu(2) = 4 \\ \nu(3) = 5 \\ \nu(4) = 8, \ldots \end{array}\right)$$

Tipicamente anziché $a_{\nu(k)}$ si scrive a_{n_k}.

$\boxed{Ex}$
- Se $\nu = id_{\mathbb{N}}$, trovo la succ. stessa.
- Se $\nu(n) = \begin{cases} 2n \\ 2n+1 \end{cases}$ trovo la sottosucc. degli elem. di indice $\begin{cases} \text{pari} \\ \text{dispari} \end{cases}$.

Prop. | Una succ. tende a ℓ $\iff$ tutte le sottosucc. tendono a ℓ
(IN PART.: se trovo due sottosucc. con limiti diversi, la successione è indeterm.)

(**Ex.** $a_n=(-1)^n$ è indeterminata, perché $a_{2k}\to 1$, $a_{2k+1}\to -1$.)

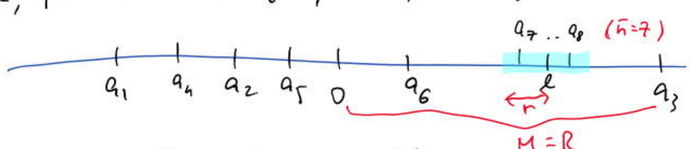
Dim. "$\Leftarrow$" ovvia (tra le sottosucc. c'è anche la succ. stessa).
"$\Rightarrow$" Sia $a_n\to\ell$: $\forall U$ intorno di ℓ $\exists n_U\in\mathbb{N}$: $a_n\in U$ $\forall n\geq n_U$.
Sia ora a_{n_k} una sottosuccessione di a_n.
Allora, poiché $n_k\geq k$, si ha che $\forall k\geq n_U$ vale $a_{n_k}\in U$. $\square$

SUCCESSIONE LIMITATA (ingl. BOUNDED)

Una successione a_n si dice LIMITATA se l'insieme $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{R}$ è limitato in $\mathbb{R}$, ovvero $\exists R>0$ t.c. $|a_n|\leq R$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Prop. | Una successione convergente è anche limitata (ma il viceversa è falso).

Dim. Supp. che $a_n\to\ell\in\mathbb{R}$: scelto un qualsiasi $r>0$, di certo $\exists\,\bar{n}\in\mathbb{N}$: $|a_n-\ell|<r$ $\forall n\geq\bar{n}$. Sia $M=\max\{|a_n| : n\leq\bar{n}-1\}$: allora, posto $R:=\max\{M, |\ell-r|, |\ell+r|\}$: allora di certo $|a_n|\leq R$ $\forall n$.



Il viceversa è falso (ex.: $(-1)^n$).

Elenchiamo ora vari classici importanti risultati di uso comune nello studio dei limiti di successione.

Prop. (Teoremi standard)

(a) PERMANENZA DEL SEGNO. $\lim a_n > \lim b_n \Rightarrow a_n > b_n$ definitivam.

[conseguenza immediata scegliendo $b_n \equiv \alpha$ cost. : $\lim a_n > \alpha \Rightarrow a_n > \alpha$ defin. e se $\alpha = 0$ è quella che usualmente viene chiamata "permanenza del segno"]

(b) CONFRONTO Supp. che esistano $\lim a_n$, $\lim b_n$. Allora

$$a_n \geq b_n \text{ definitivam.} \Rightarrow \lim a_n \geq \lim b_n.$$

[conseguenza: $a_n \geq \alpha$ definit. $\Rightarrow \lim a_n \geq \alpha$]

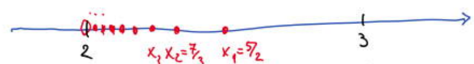
⋮

(Continuiamo nella prossima lezione.)

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI PROPOSTI PER CASA IL 15/10

- Per ciascuno dei sgg. insiemi rispondere alle stesse domande dell'esercizio qui sopra:
$A_1 = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$; $A_2 = \left\{ x \neq 0 : \cos\left(2 - \frac{1}{x}\right) = -1 \right\}$; $A_3 = \tilde{\mathbb{Q}}$;
$A_4 = \,]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup \,]2, +\infty[$; $A_5 = \{ e^x : x \in \mathbb{Q}_{>1} \}$;
$A_6 = \{ x \in \mathbb{R} : \cos(2x) > \alpha \} \cup \{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x+1|} > 1 - x \}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

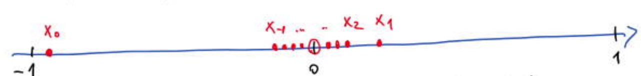
$A_1 = \left\{ \overbrace{\frac{2n+3}{n+1}}^{x_n} : n \in \mathbb{N} \right\}$



L'insieme è già stato descritto nella lezione del 14/10 (vedi).
Vale $\sup = \max = x_1 = 5/2$ (appartiene, ed è $\geq$ altri); vale $\inf = 2$, perché è minorante (infatti $x_n > 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$) e, se $y > 2$, si ha
$x_n = \frac{2n+3}{n+1} < y \iff 2n+3 < y(n+1) \iff n > \frac{3-y}{y-2}$, dunque da un certo n in poi è vero (per archimedeità).
A_1 non è aperto (non è intorno del suo punto $x_1 = 5/2$) né chiuso (perché è inf. limitato ma non ha minimo; oppure perché non contiene il suo punto di accumulazione 2) e dunque nemmeno compatto; è discreto (tutti i suoi punti sono isolati).
Non è intorno di alcuno dei suoi punti (analogamente, non ha punti interni); i suoi punti di chiusura sono tutti i suoi, e anche 2; l'unico accumulazione è 2; come detto, tutti i punti di A sono isolati; e i punti di frontiera sono tutti i suoi e anche 2.

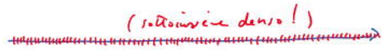
- $A_2 = \left\{ x \neq 0 : \cos\left(2 - \frac{1}{x}\right) = -1 \right\}$

Iniziamo col risolvere l'equazione: $\cos\left(2 - \frac{1}{x}\right) = -1 \iff$
$2 - \frac{1}{x} = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \iff \frac{1}{x} = -(\pi - 2) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
$\iff x = \overbrace{\frac{1}{-(\pi-2) + 2k\pi}}^{x_k} \ (k \in \mathbb{Z})$, dunque
$A_2 = \left\{ \dots, \overbrace{-\frac{1}{5\pi - 2}}^{x_{-2}}, \overbrace{-\frac{1}{3\pi - 2}}^{x_{-1}}, \overbrace{-\frac{1}{\pi - 2}}^{x_0}, \overbrace{\frac{1}{\pi + 2}}^{x_1}, \overbrace{\frac{1}{3\pi + 2}}^{x_2}, \dots \right\}$

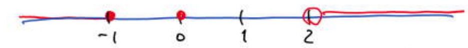


L'insieme è limitato (infatti $|x_k| < 1 \ \forall k \in \mathbb{Z}$);

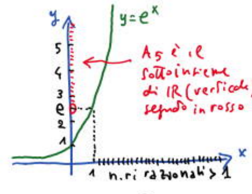
$\max = x_1 = \frac{1}{\pi+2}$ ($= \sup$), $\min = x_0 = -\frac{1}{\pi-2}$ ($= \inf$).
A_2 non è aperto (non è intorno di alcun punto) né chiuso (il punto 0 è di accumulazione ma non ci sta), dunque non è nemmeno compatto (invece $A_2 \cup \{0\}$ lo sarebbe ... vero?), ed è discreto.
Non ha punti interni; i punti di chiusura sono tutti i suoi (isolati) e 0 (accumulazione), e sono anche quelli di frontiera.

- $A_3 = \tilde{\mathbb{Q}}$ (tutti i numeri irrazionali) 

  È sup/inf. illimitato. Come già detto non è né aperto né chiuso, dunque nemmeno compatto; e non è discreto, perché i suoi punti non sono isolati.
  Non è intorno di nessuno dei suoi punti (ovvero, non ha punti interni) perché non può contenere nessun intervallo; i suoi punti di chiusura (che sono anche di accumulazione, e di frontiera) sono tutti quelli di $\tilde{\mathbb{R}}$, compresi dunque $\pm\infty$.

- $A_4 =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup]2, +\infty[$ 

  È sup/inf. illimitato. Non è né aperto (non è intorno del suo punto 0) né chiuso (il punto 2 è un'accumulazione che non vi sta), dunque nemmeno compatto; e non è discreto (l'unico suo punto isolato è $x=0$).
  I suoi punti interni sono quelli di $]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$; inoltre si usa dire che anche $-\infty$ e $+\infty$ sono punti interni di A_4 (perché A_4 contiene una semiretta inf. illimitata e una sup. illimitata: si tratta del leggero abuso di linguaggio che citavo, perché a rigor di termini un punto interno dovrebbe appartenere!). I punti di chiusura per A_4 sono tutti i suoi (che sono accumulazioni), e anche 0 (isolato), e 2, $-\infty$, $+\infty$ (accumulazioni). Quelli di frontiera sono $-1, 0, 2$.
  (Anche $\pm\infty$ sarebbero di frontiera a rigor di termini, ma il citato abuso di linguaggio fa sì che, in un caso come questo, essi siano considerati punti interni di A_4 e dunque non di frontiera).

- $A_5 = \{e^x : x \in \mathbb{Q}_{>1}\}$. Questo insieme è già stato esaminato nella lezione del 9/10 (vedi): è limitato solo inferiormente, con $\inf = e \notin A_5$ (dunque $\nexists \min$).
  Esso non è aperto (non è intorno del suo punto e^2) né chiuso (il punto e è un'accumulazione che non vi sta), dunque nemmeno compatto; e non è discreto perché nessuno dei suoi punti è isolato.
  

  Non ha punti interni. I punti di chiusura sono tutti quelli di $[e, +\infty[$ e anche $+\infty$ (e sono tutti accumulazioni).
  Inoltre tutti questi punti di chiusura sono anche di frontiera.

N.B.: nelle affermazioni di questi esercizi abbiamo implicitamente usato il fatto che l'esponenziale di base $e>1$ è una funzione continua e strettamente crescente (cosa che dovrebbe già essere nota come cultura matematica antecedente ma che comunque dimostreremo in modo rigoroso nelle lezioni a venire), il che implica che l'immagine di un qualsiasi intervallo $[a,b]$ è l'intervallo $[e^a, e^b]$.

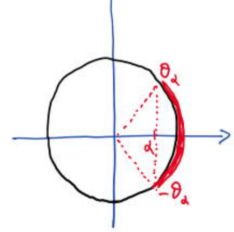
- $A_6 = A_6' \cup A_6''$, con $A_6' = \{x\in\mathbb{R} : \cos(2x) > \alpha\}$ e $A_6'' = \{x\in\mathbb{R} : \sqrt{|x+1|} \geq 1-x\}$.

Iniziamo col descrivere separatamente A_6' e A_6'' (il primo al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$).

- se $\alpha < -1$ è chiaro che $A_6' = \mathbb{R}$;

  se $\alpha = -1$ si ha $A_6' = \{x\in\mathbb{R} : \cos(2x) \neq -1\} = \{x\in\mathbb{R} : 2x \neq \pi + 2k\pi\} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$;

  se $-1 < \alpha < 1$, posto $\theta_\alpha := \arccos \alpha \in [0,\pi]$ si ha $A_6' = \{x\in\mathbb{R} : -\theta_\alpha + 2k\pi < x < \theta_\alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ (unione di una famiglia numerabile di intervalli aperti del tipo $]-\theta_\alpha + 2k\pi, \theta_\alpha + 2k\pi[$ con $k\in\mathbb{Z}$);



  se invece $\alpha \geq 1$ è altrettanto chiaro che $A_6' = \emptyset$.

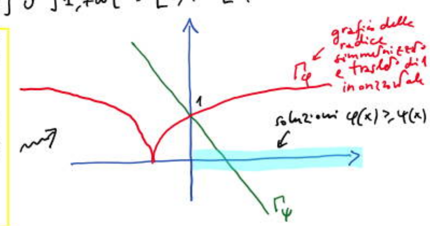
- Esaminiamo la disequazione irrazionale $\sqrt{|x+1|} \geq 1-x$. Poiché il radicando è ≥ 0, non vi sono condizioni di esistenza.

  Essendo il 1o membro sempre ≥ 0, nel caso in cui il 2o membro sia <0 la disequazione è sempre soddisfatta: dunque tutti i $x>1$ sono soluzioni. Nel caso $x \leq 1$ stiamo invece confrontando due quantità ≥ 0, dunque la disequazione equivale a quella tra i due quadrati:

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ |x+1| \geq (1-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 \geq (1-x)^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ -x-1 \geq (1-x)^2 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 3 \ \vee\ \emptyset \end{cases}$$

$\iff 0 \leq x \leq 1$. Dunque $A_6'' = [0,1] \cup]1,+\infty[= [0,+\infty[$.

D'altra parte, che fosse $A_6'' = [0,+\infty[$ sarebbe stato possibile vederlo velocemente e facilmente anche con un confronto grafico tra le funzioni $\varphi(x) = \sqrt{|x+1|}$ e $\psi(x) = 1-x$.



- Facendo allora l'unione $A_6 = A_6' \cup A_6''$ abbiamo le sgg. situazioni al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

  (1) Se $\alpha < -1$ si ha $A_6 = \mathbb{R}$: illimitato, aperto e chiuso, non compatto né discreto; è intorno di ogni suo punto e anche di $\pm\infty$ (nel senso corrente);

i punti di chiusura sono tutti i suoi e anche $\pm\infty$, e sono tutti accumulazioni; non ha punti di frontiera.

(2) Se $\alpha = -1$ si ha $A_6 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\}$ (ovvero tutto $\mathbb{R}$ meno i multipli dispari negativi di $\pi/2$): illimitato, aperto, non compatto né discreto; è intorno di ogni suo punto e anche del solo $+\infty$ (nel senso corrente); i punti di chiusura sono tutti quelli di $\tilde{\mathbb{R}}$, e sono tutti accumulazioni; i punti di frontiera sono $-\infty$ e i suddetti multipli di $\pi/2$.

(3) Se $|\alpha| < 1$ (ovvero se $-1 < \alpha < 1$) si ha, posto $\theta_\alpha = \arccos \alpha \; (\in [0, \pi])$:

$$A_6 = \dots \cup \,]-\theta_\alpha - 4\pi, \theta_\alpha + 4\pi[\, \cup \,]-\theta_\alpha - 2\pi, \theta_\alpha - 2\pi[\, \cup \,]-\theta_\alpha, +\infty[$$

(unione di infiniti intervalli aperti limitati negativi e della semiretta aperta $x > -\theta_\alpha$): illimitato, aperto, non compatto né discreto; è intorno di ogni suo punto e anche del solo $+\infty$ (...); i punti di chiusura sono tutti i suoi più gli estremi degli intervalli e anche $\pm\infty$ (sono tutti accumulazioni); i punti di frontiera sono gli estremi degli intervalli e anche $-\infty$.

(4) Infine, se $\alpha \geq 1$ si ha $A_6 = [0, +\infty[$: inferiormente limitato con $\min = 0$ ($= \inf$); chiuso ma non compatto (è sup. illimitato) né discreto; i punti interni sono quelli di $]0, +\infty]$ (compreso $+\infty$); quelli di chiusura sono quelli di $[0, +\infty]$ (compreso $+\infty$), e sono tutti accumulazioni; l'unico punto di frontiera è 0.