

# **ANALISI MATEMATICA I**

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

**Lezione di martedì 21/10/2014**

Riprendiamo dall'enunciato lasciato in sospeso l'ultima volta.

Prop.

(Teoremi standard)

(a) PERMANENZA DEL SEGNO.  $\lim a_n > \lim b_n \Rightarrow a_n > b_n$  definitivamente.

[consegua immediata scegliendo  $b_n \equiv 2$  cost.:  $\lim a_n > 2 \Rightarrow a_n > 2$  definitivamente.]  
(Nel caso  $\alpha = 0$  è ciò che usualmente viene chiamato "permanenza del segno")

(b) CONFRONTO Supp. che esistono  $\lim a_n, \lim b_n$ . Allora  
 $a_n \geq b_n$  definitivamente.  $\Rightarrow \lim a_n \geq \lim b_n$ .

[consegua:  $a_n \geq 2$  definitivamente.  $\Rightarrow \lim a_n \geq 2$ ]

(si noti che una versione stretta è falsa, cioè  $a_n > 2$  definitivamente  $\nRightarrow \lim a_n > 2$ :  
ad esempio  $1/n > 0$  ma  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0 \neq 0$ .)

(c) TEOREMI DEI "CRASTIMIERI"

(i) se  $\begin{cases} a_n \leq b_n \leq c_n \text{ definitivamente} \\ \lim a_n = \lim c_n =: \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \exists \lim b_n, \text{ e vale } \alpha.$

(ii) se  $a_n \leq b_n$  e  $a_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$

se  $a_n \leq b_n$  e  $b_n \rightarrow -\infty \Rightarrow a_n \rightarrow -\infty$ .

(d) LIMITI E OPERAZIONI: FORME "DETERMINATE"

(i) se  $\begin{cases} \lim a_n = l_1 \in \mathbb{R} \\ \lim b_n = l_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists \lim (a_n + b_n) = l_1 + l_2 \\ \exists \lim (a_n b_n) = l_1 l_2 \end{cases}$

(ii) se  $\begin{cases} \lim a_n = +\infty \text{ (opp. } -\infty) \\ b_n \text{ è inf. (opp. sup.) limitata} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim (a_n + b_n) = +\infty \\ \text{(opp. } -\infty) \end{cases}$

NELLA SIMBOLOGIA  
DEI LIMITI:

•  $+\infty + \alpha = +\infty$

(iii) se  $\begin{cases} a_n \text{ è infinitesima} \\ b_n \text{ è limitata} \end{cases} \Rightarrow a_n b_n \text{ è infinitesima}$

•  $0 \cdot \alpha = 0$

(iv) se  $\begin{cases} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \text{ è lontana da } 0 \\ \text{(cioè } \exists \alpha > 0 : b_n > \alpha \forall n) \end{cases} \Rightarrow \lim (a_n b_n) = +\infty$

•  $(+\infty) \cdot \alpha = +\infty$

(v) se  $\exists \lim a_n = l \in \underline{\mathbb{R}}^x \Rightarrow$  la succ.  $1/a_n$  ha senso definit., e  $1/a_n \rightarrow 1/l$

(vi) se  $\begin{cases} a_n > 0 \text{ definit.} \\ \lim a_n = 0 \text{ (opp. } +\infty) \end{cases} \Rightarrow$  la succ.  $1/a_n$  ha senso def., e  $1/a_n \rightarrow +\infty$  (opp.  $1/a_n \rightarrow 0$ )

•  $\frac{1}{0^+} = +\infty$   
•  $\frac{1}{+\infty} = 0$

Nota. L'idea è che, una volta dimostrata quella Proposizione, ci si possa ritenere "ragionevolmente operativi" nel calcolo dei limiti, o "ragionevolmente" significa "tranne i casi (detti FORME INDETERMINATE) in cui vi siano dei contrasti in atto" all'interno delle successioni, i più noti dei quali sono  $+\infty - \infty$  (ex:  $n^2 - 2n$ ),  $0 \cdot \infty$  (ex:  $n \sin \frac{1}{n}$ ),  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ .

- Dim. (a) Supponiamo che  $l_1 = \lim a_n < l_2 = \lim b_n$ , e siano  $V_1, V_2$  intorni di base di  $l_1$  e  $l_2$  t.c.  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ : allora  $V_1 < V_2$ , e poiché  $a_n$  entra def. in  $V_1$  e  $b_n$  in  $V_2$  di cui  $a_n < b_n$  definit. 
- (b) Se per assurdo  $l_1 < l_2 \Rightarrow a_n < b_n$  definit., ma questo nega l'ipotesi.
- (c) (i) Dato  $\varepsilon > 0$ , le succ.  $a_n$  e  $c_n$  entrano definit. in  $B_2(\varepsilon)$ :  
ma anche lo stesso vale per  $b_n$ , strett. tra esse. 
- (ii)  $\forall \eta > 0 \exists n_\eta \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_n > \eta \forall n \geq n_\eta$ , dunque se  $a_n \leq b_n$  lo stesso vale per  $b_n$ .
- (d) (i) Sia  $\lim a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim b_n = \beta \in \mathbb{R}$ .  
Dato  $\varepsilon > 0$ , sappiamo che  $\begin{cases} \exists n'_\varepsilon \in \mathbb{N}: |a_n - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall n \geq n'_\varepsilon \\ \exists n''_\varepsilon \in \mathbb{N}: |b_n - \beta| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad \forall n \geq n''_\varepsilon \end{cases}$ .  
Ma allora definito  $n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ ,  $\forall n \geq n_\varepsilon$  vale  
 $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ .  
Quanto al prodotto, si ha  
 $|a_n b_n - \alpha \beta| = |a_n b_n - a_n \beta + a_n \beta - \alpha \beta| = |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta|$   
 $\leq |a_n| \cdot |b_n - \beta| + |a_n - \alpha| \cdot |\beta|$ .  
Poiché la succ.  $a_n$  converge, sappiamo che è limitata,

dopo  $\exists M > 0$  t.c.  $|a_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  
 Per poi un qualsiasi  $N > |\beta|$ , sappiamo che  $\begin{cases} \exists n'_1: |a_n - \alpha| < \frac{1}{2N} \varepsilon \\ \exists n'_2: |b_n - \beta| < \frac{1}{2M} \varepsilon \end{cases}$   
 perciò  $|a_n b_n - \alpha \beta| \leq M \cdot \frac{1}{2N} \varepsilon + \frac{1}{2N} \varepsilon \cdot N = \varepsilon$ .

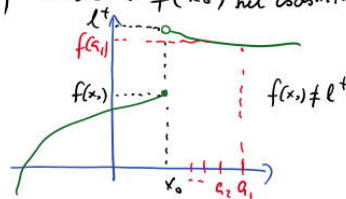
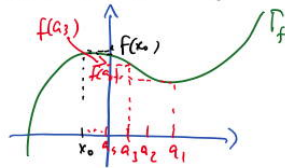
(ii) Siano  $a_n \rightarrow +\infty$ ,  $b_n > -L$  per un certo  $L > 0$ .  
 Dato  $M > 0$ , sappiamo che  $\exists n_n: a_n > M + L \quad \forall n \geq n_n$ .  
 Ma allora  $a_n + b_n > M + L + (-L) = M$ , perciò  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ .

(iii) Sia  $a_n \rightarrow 0$ ,  $|b_n| < R$  per un certo  $R > 0$ .  
 Dato  $\varepsilon > 0$ , sappiamo che  $\exists n_\varepsilon: |a_n| < \frac{\varepsilon}{R} \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ .  
 Ma allora  $|a_n b_n| < \frac{\varepsilon}{R} \cdot R = \varepsilon$ , perciò  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

Le altre dimostrazioni si lasciano come esercizio.  $\square$

Si osservano, negli esercizi, i risultati dei teoremi standard e anche, molto spesso, la nozione di funzione continua:

Se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione e  $x_0 \in A$  è un punto di accumulazione per  $A$ , si dice che  $f$  è continua in  $x_0$  se  
 per ogni successione  $a_n \in A$  che tende a  $x_0$  nel dominio,  
 la successione delle immagini  $f(a_n)$  tende a  $f(x_0)$  nel codominio.



Prop. Tutte le funzioni elementari (moduli, potenze, exp, log, goniometriche...) sono continue (in ogni punto del loro dominio), così le loro somme, prodotti...

Ex. Se  $a_n$  è succ. infinitesima, allora  $\sin(a_n)$  tende a  $\sin(0) = 0$ ;  
 $\cos(2 - a_n) \rightarrow \cos(2)$ ,  $\exp(a_n) \rightarrow \exp(0) = 1$ .

Alcuni esempi.

•  $a_n = \frac{1 - \cos(n)}{n^2}$ , vale  $0 \leq 1 - \cos(n) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq \frac{2}{n^2}$  (dopo  $n^2$   $\frac{2}{n^2} \rightarrow 0$ )  
 Dunque  $a_n \rightarrow 0$ .

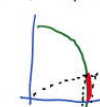
•  $a_n = \frac{\arctan(n^3) - 1}{n^2} \quad (a \in \mathbb{R})$ . Dopo  $\lim a_n = \begin{cases} 0^+ & \text{se } a > 0 \\ \frac{\pi}{2} - 1 & \text{se } a = 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$

*Handwritten notes:*  $n^2 \rightarrow +\infty$  se  $a > 0$ ,  $\rightarrow 1$  se  $a = 0$ ,  $\rightarrow 0^+$  se  $a < 0$ .  $\arctan(n^3) \rightarrow \frac{\pi}{2} - 1$ .

•  $a_n = 5n - n^2$ . È in forma indeterminata  $+\infty - \infty$ .  
Per risolvere, bisogna capire "chi amanda" e "far pesare il suo comando":

$a_n = n^2 \left( \frac{5}{n} - 1 \right) \rightarrow -\infty$ .

*Handwritten notes:*  $\frac{5}{n} \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ ,  $0 - 1 = -1$ .

•  $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .  $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \sin(0) = 0$ .  
Siamo in f.i.  $\infty \cdot 0$ . Si può vedere come  $a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ , con particolare del lim. in variabile reale  $\frac{\sin x}{x}$  quando  $x \rightarrow 0$  (che forse n. saprà che  $\rightarrow 1$ ).  
Usiamo la stessa dimostrazione probabile già nota:  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \leq \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ .  
 $\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq a_n \leq 1$ .  
*Handwritten notes:*  $\cos(0) = 1$ . 

**SUCCESSIONI MONOTONE**: quelle crescenti oppure quelle decrescenti

(si intende che  $a_n$  è detta crescente se  $m \leq n \Rightarrow a_m \leq a_n$ , dove ad esempio una succ. costante è crescente; e invece si vuole che  $m < n \Rightarrow a_m < a_n$  allora si dice che  $a_n$  è strettamente crescente.)

Le successioni monotone hanno il vantaggio di essere sempre determinate, e possiamo anche dire qual è il loro limite:

Prop. | Una successione  $a_n$  monotona crescente tende a  $l = \sup_{\mathbb{N}} \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  dunque o essa converge o essa diverge a  $+\infty$ .  
 Risultato analogo per le monotone decrescenti (mutatis mutandis)

Dim. Ci sono due possibilità:  $l \in \mathbb{R}$  oppure  $l = +\infty$ .

Se  $l \in \mathbb{R}$ , la tesi è:  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$ .

Sia dunque  $\varepsilon > 0$ : poiché  $l - \varepsilon < l$ , per la 2a propr. caratt. del sup.

$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_{n_\varepsilon} > l - \varepsilon$ , ovvero  $l - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq l$ .

Ma sappiamo che  $a_n$  è crescente, dunque  $\forall n \geq n_\varepsilon$  si avrà  $l - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq l$  che è la tesi.

Se invece  $l = +\infty$ , la tesi è:  $\forall M > 0 \exists n_M \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \geq n_M$ .

Sia dunque  $M > 0$ : poiché  $l = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ , si avrà  $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_{\bar{n}} > M$ . Ma la succ. è crescente, dunque  $\forall n \geq \bar{n}$  vale  $a_n \geq a_{\bar{n}} > M$ .  $\square$

Cor. | Una successione crescente e sup. limitata è convergente.

Vale inoltre il sg. fatto, per le successioni qualunque:

Prop. | Da ogni successione si può estrarre qualche sottosuccessione monotona.

Cor. | Da ogni successione limitata si può estrarre qualche sottosuccessione convergente.

Ex  $a_n = \sin(n)$  ha qualche sottosucc. convergente (a qualche valore in  $[-1, 1]$ ).

Prop. | Una successione monotona tende a  $l$  ( $\Leftrightarrow$ ) esiste una sua sottosuccessione che tende a  $l$ .

Dim. " $\Rightarrow$ " ovvio (si scella)

" $\Leftarrow$ " Per finire la idea  $a_n$  sia crescente, e sia  $a_{n_k}$  una sua sottosuccessione - anch'essa crescente - che tende a  $l$ :

sappiamo dunque che  $l = \sup_{\mathbb{N}} \{a_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ , ma essendo la successione crescente si ha anche  $l = \sup_{\mathbb{N}} \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  (infatti  $\forall n \exists k : a_{n_k} \geq a_n$ ), pertanto anche  $a_n \rightarrow l$ .  $\square$

## RISOLUZIONE DELLE FORME INDETERMINATE

E' molto utile il seguente

Prop. (CRITERIO DEL RAPPORTO) Sia  $a_n > 0$  t.c. esista  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  (dye  $l \geq 0$  o  $l = +\infty$ )  
 Allora:  
 • se  $0 \leq l < 1$  si ha che  $a_n \rightarrow 0^+$   
 • se  $l > 1$  si ha che  $a_n \rightarrow +\infty$   
 • se  $l = 1$  non si può dare una risposta in generale

Dim. Supponiamo che  $0 \leq l < 1$ : allora (per m. seq.)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  definit.  
 ovvero  $a_{n+1} < a_n$  definit. ovvero  $a_n$  è decrescente definit.  $\Rightarrow a_n$  converge.  
 Sia  $d \geq 0$  il suo limite: poiché  $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot a_n$ , passato al limite  
 (fatti) si ha che  $d = l d$ . Se fosse  $d > 0$ , semplificando otteniamo  $l = 1$ ,  
 falso! Dunque  $d = 0$ .

Il caso  $l > 1$  si prova in modo simile (esercizio)

Invece nel caso  $l = 1$  possono accadere le cose più disparate:

$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (\text{si noti che } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/n+1}{1/n} = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow l = 1)$$

$$b_n = n \rightarrow +\infty \quad (\text{tale che } \frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow l = 1)$$

$$c_n = 4 \rightarrow 4 \quad (\text{tale che } \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1)$$

□

Esaminiamo alcune successioni importanti.

- SUCCESSIONE GEOMETRICA  $a_n = 2^n$  (con  $2 > 0$ ).  
 Si ha  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 = l$ , dove  $\lim 2^n = \begin{cases} 0^+ & \text{se } 0 \leq 2 < 1 \\ 1 & \text{se } 2 = 1 \\ +\infty & \text{se } 2 > 1 \end{cases}$

- CONFRONTO TRA POTENZE E ESPONENZIALE  $a_n = \frac{2^n}{n^q}$  con  $2 > 1$ ,  $q > 0$

si ha  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^q} \cdot \frac{n^q}{2^n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^q \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^q} = +\infty$

*Tra potenze e espon. vince l'esponenziale*
- CONFRONTO ESPONENZIALE - FATTORIALE  $a_n = \frac{2^n}{n!}$  con  $2 > 1$

si ha che  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

*tra esp e fatt. vince fatt.*
- CONFRONTO FATTORIALE - POTENZA RIPETUTA  $a_n = \frac{n!}{m^n}$

si ha che  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(m+1)^{n+1}} \cdot \frac{m^n}{n!} = \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot \frac{m^n}{n!} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e}$

ed essendo  $\frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{m^n} = 0$  *tra fatt. e pot. ripete vince la pot. ripete. (dram.)*

Gli sono previsti di una utile famiglia di ordini di grandezza.

Ex  $a_n = \frac{3n! + 2^n}{7n^n - 8n + 3} = \frac{\frac{n!}{n^n} \left( 3 + \frac{2^n}{n!} \right)}{7 - \frac{8}{n} + \frac{3}{n^n}} \rightarrow 0$

# ESERCIZI PER CASA

Determinare il limite delle sgg. successioni per  $a \in \mathbb{R}$ :

$$(1) \quad a_n = \frac{n^2 + 3 \arctan n}{2n^2 - \arctan(n^{-2})}$$

$$(2) \quad b_n = \sqrt[n]{3n + |a|^n} - 3^{n^2}$$

$$(3) \quad c_n = \frac{n(1-n) + n^2}{a^{-n} - n}$$

$$(4) \quad d_n = 2^{2^n} - \frac{1+2^n}{n!} \quad \left( \begin{array}{l} \text{iniziale} \\ \text{controllato} \\ a=3 \text{ e } a=-1/3 \end{array} \right)$$

$$(5) \quad e_n = \frac{n^2}{|a|^n + n} - \arctan(e^{2^n} + 2)$$

$$(6) \quad f_n = \frac{|a|^n - 2 \sin(2n) - n^{22}}{n+1} \quad \left( \begin{array}{l} \text{minimo con} \\ a=-2, a=1/2, a=1 \end{array} \right)$$

$$(7) \quad g_n = \frac{n}{(n!)^{2-1} - 2|a|^n} \quad \left( \text{idem " } \right)$$

Svolgiamo il primo.

$$(1) \quad a_n = \frac{n^2 + 3 \arctan(n)}{2n^2 - \arctan(n^{-2})}$$

Proviamo i casi  $a \geq 0$ .

• Se  $a > 0$ .

$$a_n = \frac{n^2 \left( 1 + \frac{3 \arctan(n)}{n^2} \right)}{n^2 \left( 2 - \frac{\arctan(n^{-2})}{n^2} \right)} \xrightarrow{\text{limite}} \begin{cases} +\infty & \text{se } 2-2 > 0 \\ & (\text{cioè } a < 2) \\ 1/2 & \text{se } 2-2 = 0 \\ & (\text{cioè } a = 2) \\ 0^+ & \text{se } 2-2 < 0 \\ & (\text{cioè } a > 2) \end{cases}$$

• Se  $a = 0$ .

$$a_n = \frac{n^2 + 3 \arctan(n)}{2 - \pi/4} \rightarrow +\infty$$

• Se  $a < 0$ .

$$a_n = \frac{n^2 \left( 1 + \frac{3 \arctan(n)}{n^2} \right)}{2n^2 - \arctan(n^{-2})} \rightarrow -\infty \quad \begin{matrix} +\infty \\ -\pi/2 \end{matrix}$$

**RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI**  
PROPOSTI PER CASA IL 20/10

**ESERCIZI PER CASA** Derivare i segg. sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  e dire per ciascuno se essi (giustificando le risposte) se e' sup/inf limitato, determinando sup/inf/max/min; se e' aperto, chiuso, compatto, denso; di quali punti di  $\mathbb{R}$  e' interno; quali punti di  $\mathbb{R}$  ha interni, di aderenza (= chiusura), di accumulazione, isolati, di frontiera.

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R} : \log|x| + x(x-2) > 0\} \cup \{x > 0 : \sin(\frac{x-1}{x}) = 0\} \quad \text{al variare di } a \in \mathbb{R}$$

$$B_2 = \{a^n - 1 : n \in \mathbb{N}\} \cup \left( \{x \in \mathbb{R} : 1 + \log(3x) \leq 0\} \cap [\frac{1}{2}, 2] \right) \quad \text{al variare di } a \geq 0$$

$$B_3 = \{x < 0 : 6 \arcsin(2x + \frac{1}{3}) < \pi\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \log(x-1) \in \mathbb{Z}\}$$

$$B_4 = \{x \in \mathbb{R} : x < \log x\} \cap \exp^{-1}([-2, 3])$$

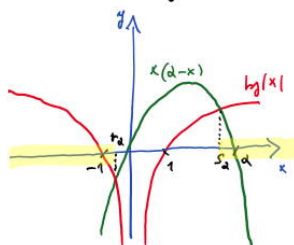
← antimmagine tramite la funzione esponenziale  $f(x) = e^x$

$$B_5 = \{y \in \mathbb{R} : y = x^2 - x, 0 < \log(x+2) < 1\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : \sqrt{|n+2|} + n \geq 0\}$$

- si ha  $B_1 = B_1'(a) \cup B_1''$  con  $B_1'(a) = \{x \in \mathbb{R} : \log|x| + x(x-2) > 0\}$   
e  $B_1'' = \{x > 0 : \sin(\frac{x-1}{x}) = 0\}$ .

Per  $B_1'(a)$  va chiaro che  $\log|x| > x(2-x)$ , e un facile confronto grafico mostra chiaramente che:

- se  $a > 0$  (situazione del disegno a destra) esistono  $-1 < r_a < 0$  e  $s_a > 0$  t.c. cio' si e' soddisfatto in  $] -\infty, r_a[ \cup ] s_a, +\infty[$ ;
- se  $a = 0$  idem, con  $s_a = -r_a$ ;
- se  $a < 0$  situazione simile, con  $r_a < 0$  e  $0 < s_a < 1$ .



Invece, per  $B_1''$ , si ha  $\sin(\frac{x-1}{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 = k\pi x$

$$\Leftrightarrow (k\pi - 1)x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1 - k\pi}, \text{ e poich\'e deve essere } x > 0$$

dovr\'e essere  $k = 0, -1, -2, \dots$  e dunque  $B_1'' = \{1, \frac{1}{\pi+1}, \frac{1}{2\pi+1}, \frac{1}{3\pi+1}, \dots\}$   
(successione infinitesima di punti che decresce a 0 da sopra).

L'insieme union  $B_1$  e' sicuramente sia sup. che inf. illimitato.

Faccendo l'unione, una parte (ma non la totale!) dei punti di  $B_1''$  viene inglobata nell'intervallo aperto  $]s_2, +\infty[$ : dunque l'unione non è aperta (perché non è intorno dei punti non inglobati di  $B_1''$ , che sono isolati), e non è nemmeno chiusa (ad esempio, perché non contiene il suo punto d'accumulazione  $r_2$ ). Dunque esso non è compatto, e nemmeno discreto (i punti di  $B_1'(2)$  non sono isolati).

I punti interni sono quelli di  $B_1'(2)$  e  $\pm\infty$ ; quelli d'accumulazione sono quelli di  $B_1'(2)$ ,  $\pm\infty$ ,  $0$ ,  $r_2$ ,  $s_2$ . Quelli di frontiera sono tutti quelli non inglobati di  $B_1''$ , e anche  $r_2$ ,  $s_2$ ,  $0$ .

• Per  $B_2$ :

La condizione  $1 + \operatorname{tg} 3x \leq 0$  dà  $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 3x \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi$  ovvero  $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} < x \leq -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$  (con  $k \in \mathbb{Z}$ ): intersecando questa condizione con  $[\frac{\pi}{6}, 2]$  si ottiene  $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \cup ]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}]$ . Vediamo poi  $\{\alpha^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ : se  $\alpha = 0$  (risp. se  $\alpha = 1$ ) c'è il solo punto  $-1$  (risp.  $0$ ); se  $0 < \alpha < 1$  si tratta di una successione di punti negativi che converge a  $-1$  da sopra; se  $\alpha > 1$  è una successione di punti positivi che tende a  $+\infty$ . Dunque:  
 • Se  $\alpha = 0$  l'insieme  $A$  è limitato con  $\min A = -1$  e  $\max A = \frac{7\pi}{12}$ ; ne' aperto ne' chiuso ne' compatto ne' discreto; la sua chiusura è  $\{-1\} \cup ]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \cup ]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}]$ , e tutti questi punti sono anche di accumulazione tranne  $-1$  che è isolato; i punti interni sono quelli di  $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \cup ]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}]$ ; i punti di frontiera sono  $-1$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{7\pi}{12}$ .  
 • Se  $0 < \alpha < 1$  l'insieme  $A$  è limitato con  $\inf A = -1$  (ma non è minimo) e  $\max A = \frac{7\pi}{12}$ ; ne' aperto ne' chiuso ne' compatto ne' discreto; i punti di chiusura sono tutti i suoi punti più  $-1$ ,  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{2}$ , e sono tutti punti di accumulazione tranne gli  $\alpha^n$  che sono isolati; come prima i punti interni sono quelli di  $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \cup ]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}]$ ; i punti di frontiera sono  $-1$ , tutti gli  $\alpha^n$ , e poi ancora  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{7\pi}{12}$ .  
 • Se  $\alpha = 1$  tutto è come per  $\alpha = 0$  a patto di rimpiazzare il punto  $-1$  con  $0$ .  
 • Se infine  $\alpha > 1$  l'insieme  $A$  è inferiormente limitato con  $\inf A = \min\{\alpha - 1, \frac{\pi}{6}\} > 0$  (e quando  $\inf A = \alpha - 1$ , il che accade quando  $\alpha - 1 \leq \frac{\pi}{6}$  ovvero per  $1 < \alpha \leq 1 + \frac{\pi}{6}$ , tale  $\inf$  è anche minimo), ed è superiormente illimitato; ne' aperto ne' chiuso ne' compatto ne' discreto; i punti di chiusura sono tutti i suoi punti più  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{2}$ , e sono tutti punti di accumulazione tranne gli  $\alpha^n$  che sono isolati (tranne il caso in cui siano interni a uno dei due intervalli); i punti interni sono ancora quelli di  $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}] \cup ]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{12}]$ ; i punti di frontiera sono tutti gli  $\alpha^n$  (sempre tranne il caso in cui siano interni a uno dei due intervalli), e anche  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{7\pi}{12}$ .

• Per  $B_3$ :

L'insieme  $A$  è ottenuto unendo i punti di  $A_1 = \{x < 0 : 6 \arcsin(2x + \frac{1}{3}) < \pi\}$  e  $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : \log(x-1) \in \mathbb{Z}\}$ . La condizione  $6 \arcsin(2x + \frac{1}{3}) < \pi$ , ovvero  $\arcsin(2x + \frac{1}{3}) < \frac{\pi}{6}$ , equivale a  $-1 \leq 2x + \frac{1}{3} < \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ , da cui  $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{12}$ ; prendendo poi i soli  $x < 0$  si ottiene  $A_1 = [-\frac{2}{3}, 0[$ . La condizione  $\log(x-1) \in \mathbb{Z}$  significa  $x-1 = e^n$  per qualche  $n \in \mathbb{Z}$ , ovvero  $A_2 = \{x_n := 1 + e^n : n \in \mathbb{Z}\}$ : si tratta di una famiglia di punti che per  $n < 0$  tende da sopra a  $1$  senza raggiungerlo, mentre per  $n \geq 0$  crescono da  $2$  verso  $+\infty$ . Pertanto  $A$  è limitato solo inferiormente, con  $\min A = -\frac{2}{3}$ ; non è aperto (non è intorno di  $x_0 = 2$ ) ne' chiuso ( $0$  è di accumulazione ma non vi sta), non compatto, non discreto; è intorno dei punti di  $]-\frac{2}{3}, 0[$ ; i punti di aderenza sono tutti i suoi più  $0$ ,  $1$  e  $+\infty$ , quelli di accumulazione sono tutti quelli di  $[-\frac{2}{3}, 0]$  più  $1$  e  $+\infty$ , mentre gli  $x_n$  sono isolati; infine, i punti di frontiera sono  $-\frac{2}{3}$ ,  $0$ ,  $1$ , tutti gli  $x_n$ , e  $+\infty$ .

• Per  $B_4$ :

L'insieme  $A$  è ottenuto intersecando  $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x < \operatorname{tg} x\}$  e  $A_2 = \exp^{-1}([-2, 3]) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq e^x \leq 3\}$ . Con un confronto grafico tra le funzioni  $x$  e  $\operatorname{tg} x$  si vede con chiarezza che  $A_1$  è unione infinita di intervalli aperti limitati del tipo  $]x_k, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$  per  $k \in \mathbb{Z}$ , con  $x_0 = 0$ ,  $x_{-k} = -x_k$  e tale che la successione  $(x_k)_{k \geq 1}$  tende a  $+\infty$  con  $2k\pi < x_k < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} ((\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - x_k) = 0^+$ ; d'altra parte si ha  $A_2 = ]-\infty, \log 3]$ , ed essendo  $x_0 = 0 < \log 3 < \frac{\pi}{2}$  si ottiene che  $A = \bigcup_{k < 0} ]x_k, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[ \cup ]0, \log 3]$ . Pertanto  $A$  è limitato solo superiormente, con  $\max A = \log 3$ ; non è aperto (ha massimo) ne' chiuso (ad esempio,  $0$  è di accumulazione ma non vi sta), non compatto, non discreto; è intorno di tutti i suoi punti tranne  $\log 3$ ; i punti di aderenza, che sono anche di accumulazione, sono tutti i suoi più gli estremi degli intervalli (ovvero  $0$ ,  $x_k$  e  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  per  $k < 0$ ) e  $-\infty$ ; infine, i punti di frontiera sono gli estremi degli intervalli (ovvero  $0$ ,  $\log 3$ ,  $x_k$  e  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  per  $k < 0$ ) e  $-\infty$ .

• Per  $B_5$ :

L'insieme  $A$  è ottenuto unendo  $A_1 = \{y \in \mathbb{R} : y = x^2 - x, 0 < \log(x+2) < 1\}$  e  $A_2 = \{n \in \mathbb{Z} : \sqrt{|n+2|} + n \geq 0\}$ . La condizione  $0 < \log(x+2) < 1$  richiede che  $x > -2$  ed equivale, in tale ipotesi, a  $1 < x+2 < e$ , ovvero  $-1 < x < e-2$ ; dunque  $A_1$  è l'immagine tramite la funzione  $\phi(x) = x^2 - x$  dell'intervallo  $] -1, e-2[$ , e un semplice disegno (il grafico di  $\phi$  è una parabola) mostra che si tratta di  $[-\frac{1}{4}, 2[$ . Quanto a  $A_2$ , la condizione  $\sqrt{|n+2|} + n \geq 0$ , ovvero  $\sqrt{|n+2|} \geq -n$ , è sempre vera quando  $n > 0$ , mentre per  $n \leq 0$  equivale a  $|n+2| \geq n^2$ , vera per  $n \geq -1$  (dunque per  $n = -1$  e  $n = 0$ ): ne ricaviamo che  $A_2 = \mathbb{Z}_{\geq -1}$ . Perciò  $A$  è formato dall'intervallo  $[-\frac{1}{4}, 2[$  più tutti i numeri interi  $\geq -1$ : è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  limitato solo inferiormente, con  $\min A = -1$ ; è chiuso in  $\mathbb{R}$  (si noti che anche il punto 2 vi appartiene) ma non in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  (infatti  $+\infty$  è di accumulazione ma non vi sta), non compatto, non discreto; è intorno dei suoi punti in  $] -\frac{1}{4}, 2[$ ; i punti di aderenza sono tutti i suoi più  $+\infty$ , tra i quali quelli di accumulazione sono gli elementi di  $[-\frac{1}{4}, 2]$  e  $+\infty$ , e quelli isolati sono  $-1$  e tutti gli interi  $\geq 3$ ; infine, i punti di frontiera sono  $-\frac{1}{4}$ , tutti i numeri interi  $\geq -1$  tranne 0 e 1, e  $+\infty$ .