ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 22/10/2014

ESPONENZIALE NATURALE

Dato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la successione $e_n(x) := \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. è definit. > 0 (per $n > -x$) È in f.i. 1^∞

Che cos'è $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n(x)$? Notiamo che si tratta di una f.i. 1^∞.

Teorema (Esponenziale naturale).

La successione $e_n(x)$ è definitivamente crescente e limitata, dunque converge a un certo numero reale $\exp(x) := \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Si ottiene dunque una funzione $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con le seguenti proprietà:

(1) $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (in part. $\exp(0) = 1$)

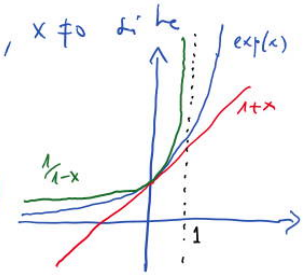
(3) (Proprietà di omomorfismo) $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$

ovvero $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ è morfismo di gruppi

(4) (Disuguaglianze dell'exp) Per ogni $x < 1$, $x \neq 0$ si ha

$$1+x < \exp(x) < \frac{1}{1-x}$$

(per $x=0$ vale l'uguaglianza; e la prima disug. $1+x < \exp(x)$ vale $\forall x \in \mathbb{R}_x$)



(5) (Stretta crescenza) Se $x < x'$ allora $\exp(x) < \exp(x')$.

Dim Nelle note del corso.

In particolare, si definisce $e := \exp(1) = 2{,}71828\cdots$ NUMERO DI NEPERO si prova usando (4) e la continuità di exp di cui parleremo poi.

Poiché $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ è strett. crescente e suriettiva

$\Rightarrow$ è biiettiva, e la sua inversa $\log := \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

(che sarà anch'essa strett. crescente in quanto inversa di funz. strett. cresc.)

la chiamo LOGARITMO NATURALE .

Inoltre, dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a>0$, definisco le funzioni seguenti:

$$x^{\alpha} : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad x^{\alpha} := \exp(\alpha \log x) \qquad \text{POTENZA REALE}$$

$$a^{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad a^{x} := \exp(x \log a) \qquad \text{ESPONENZIALE DI BASE } a$$

(dunque abbiamo la notazione alternativa $e^x = \exp(x)$)

e, se $a>0$ e $a \neq 1$,

$$\log_a : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \log_a(x) := \frac{\log x}{\log a} .$$

Parliamo ora di alcune relazioni importanti tra successioni e topologia.

Prop. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Un punto $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di chiusura per A $\Longleftrightarrow$ $\exists$ successione di elementi di A che tende a x_0

(2) Un punto $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione per A $\Longleftrightarrow$ $\exists$ succ. di elementi di A tutti diversi da x_0 che tende a x_0

(3) A è compatto $\Longleftrightarrow$ A è "sequenzialmente compatto" ovvero ogni successione di elementi di A ammette una sottosuccessione che converge a un elemento di A .

Dim (1) Iniziamo dal caso in cui $x_0 \in \mathbb{R}$.

x_0 di chiusura per A $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ si ha $B_{x_0}(\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Longleftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $B_{x_0}(\frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ (anche le palle di centro x_0 e raggi $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ sono una base di intorni di x_0)

$\Longleftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $a_n \in A$: $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ successione in A che converge a x_0.

Similmente, nel caso ad esempio $x_0 = -\infty$:

$-\infty$ di chiusura per A $\Leftrightarrow$ A è inf. illimitato $\Leftrightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists a_n \in A$: $a_n < -n$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ succ. in A che div. a $-\infty$.

(2) Dimostrazione del tutto simile

(3) Esercizio (c'è comunque sulle dispense). $\square$

Torniamo agli esercizi sul limite di successioni.

Alcune classiche forme indeterminate sono le seguenti:

$$a_n = \sqrt[n]{n!}\ , \qquad b_n = \sqrt[n]{n}\ , \qquad c_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Quale sarà il loro limite?

- $n! \overset{\uparrow}{=} \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n}_{\geq (n/2)^{n/2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \Rightarrow a_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}} \longrightarrow +\infty$

  faccio $\sqrt[n]{\cdot}$ di ambo i membri

  se n pari (similmente se n dispari, adattare la dim.)

  $\Rightarrow a_n \to +\infty$

- Vale il

  Lemma (CESARO) Se $d_n > 0$ ed esiste $\ell = \lim \frac{d_{n+1}}{d_n}$, allora esiste anche $\lim \sqrt[n]{d_n}$ e vale anch'esso ℓ.

Dunque $\lim b_n = 1$.

• Usiamo il lemma di Cesàro con $d_n = \frac{n!}{n^n}$: poiché $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$, vale $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

$$b_n = \underbrace{\sqrt[n]{3n+|\alpha|^n}}_{b_n'} - \underbrace{3^{n\alpha}}_{b_n''} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

b_n': distinguiamo i tre casi $|\alpha|<1$, $|\alpha|=1$, $|\alpha|>1$.

- Se $|\alpha|<1$ (ovvero se $-1<\alpha<1$) allora $|\alpha|^n \to 0^+$:

$$b_n' = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\ \underbrace{\sqrt[n]{3+\underbrace{\frac{|\alpha|^n}{n}}_{\to 0}}}_{\to 1} \to 1$$

- Se $|\alpha|=1$ (ovvero se $\alpha=\pm 1$) viene $b_n' = \sqrt[n]{3n+1} \xrightarrow{(\text{idem})} 1$

- se $|\alpha|>1$ (ovvero se $(\alpha<-1) \vee (\alpha>1)$)

$$b_n' = |\alpha| \sqrt[n]{1+\underbrace{\frac{3n}{|\alpha|^n}}_{\to 0\ (\text{visto ieri})}} \longrightarrow |\alpha|$$

b_n'': $\quad 3^{n\alpha} = (\underbrace{3^\alpha}_{\beta})^n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta = 3^\alpha > 1 & (\text{ovvero } \alpha>0) \\ 1 & \text{se } \beta = 3^\alpha = 1 & (\text{ovvero } \alpha=0) \\ 0^+ & \text{se } \beta = 3^\alpha < 1 & (\text{ovvero } \alpha<0) \end{cases}$

Dunque, per $b_n = b_n' - b_n''$:

α		-1		0		1	
$\lim b_n =$	$\lvert\alpha\rvert$	1	1	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\lvert\alpha\rvert - 0^+$	$1-0^+$	$1-0^+$	$1-1$	$1-(+\infty)$	$1-(+\infty)$	$\lvert\alpha\rvert-(+\infty)$

Risoluzione degli altri esercizi proposti per casa ieri 21/10

ESERCIZI PER CASA. Determinare il limite delle sgg. successioni al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) $a_n = \dfrac{n^2 + 3\,\mathrm{arctg}\, n}{2n^\alpha - \mathrm{arctg}(n^{-\alpha})}$

(2) $b_n = \sqrt[n]{3n + |\alpha|^n} - 3^{n\alpha}$

già svolti in aula

(3) $c_n = \dfrac{n(1-n) + n^\alpha}{\alpha^{-n} - n}$

(4) $d_n = 2^{\alpha n} - \dfrac{1+\alpha^n}{n!}$ (inizia con $\alpha = 3$ e $\alpha = -\frac{1}{3}$)

(5) $e_n = \dfrac{n^\alpha}{|\alpha|^n + n} - \mathrm{arctg}(e^{\alpha n} + 2)$

(6) $f_n = \dfrac{|\alpha|^n - 2\sin(\alpha n) - n^{2\alpha}}{n+1}$ (inizia con $\alpha = -2, \frac{1}{2}, 1$)

(7) $g_n = \dfrac{n}{(n!)^{\alpha-1} - 2|\alpha|^n}$ (inizia con $\alpha = -2, \frac{1}{2}, 2$)

- Per c_n :

Si dice che una successione a_n "diverge a ∞" (e si scrive $a_n \to \infty$, oppure $\lim a_n = \infty$) quando $|a_n| \to +\infty$. Questa definizione è comoda per le successioni come ad es. $a_n = (-3)^n$ che, pur essendo indeterminata, in realtà diverge nella grandezza dei termini.
È piuttosto chiaro che se a_n è limitata e $b_n \to \infty$ allora $\frac{a_n}{b_n}$ è infinitesima (infatti se esiste $M>0$ t.c. $|a_n|<M$ $\forall n$ allora $\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{M}{|b_n|} \to 0$); e che se $\beta < -1$ allora $\lim \frac{n^q}{\beta^n} = 0$ (infatti $\beta = -|\beta|$, dunque $\lim \frac{n^q}{\beta^n} = \lim\left(-\frac{n^q}{|\beta|^n}\right) = 0$). Questo ultimo fatto viene usato nella soluzione seguente, nel caso $|\alpha|<1$ (con $\beta = \frac{1}{\alpha}$).

Nella successione $a_n = \frac{n(1-n)+n^\alpha}{\alpha^{-n}-n}$ si intende che $\alpha \neq 0$. • Se $|\alpha| < 1$, ovvero se $|\frac{1}{\alpha}| > 1$, si ha $a_n = \frac{n^2(-1+\frac{1}{n}+n^{\alpha-2})}{(\frac{1}{\alpha})^n(1-\frac{n}{(\frac{1}{\alpha})^n})}$ da cui (notando che $\alpha - 2 < -1$ e ricordando che se $|y| > 1$ allora $\lim \frac{n^x}{y^n} = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) si ha che il limite di a_n è 0. • Se $|\alpha| > 1$ con $\alpha \neq 2$, si ha che α^{-n} tende a 0, dunque (raccogliendo al numeratore la potenza più grande tra n^2 e n^α, e al denominatore n) il limite di a_n è $+\infty$ se $\alpha < 2$, oppure $-\infty$ se $\alpha > 2$. • Infine, nel caso $\alpha = 2$ si ottiene $a_n = \frac{n}{2^{-n}-n} = \frac{1}{-1+\frac{2^{-n}}{n}} =$, che tende a -1.

- Per d_n :

Discuteremo da subito il caso generale $\alpha \in \mathbb{R}$, lasciando $\alpha = 3$ e $\alpha = -\frac{1}{3}$ come casi particolari.
Sia ha $a_n = b_n - c_n$ con $b_n := 2^{\alpha n}$ e $c_n := \frac{1+\alpha^n}{n!}$. La successione b_n tende a $+\infty$ se $\alpha > 0$, a 1 se $\alpha = 0$ e a 0^+ se $\alpha < 0$. D'altra parte, la successione c_n tende a 0 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: se $|\alpha| \leq 1$ ciò è chiaro (infatti il numeratore è finito e il denominatore infinito), mentre se $|\alpha| > 1$ si ha $0 \leq |c_n| \leq \frac{2|\alpha|^n}{n!}$ e basta applicare i carabinieri (infatti $\frac{2|\alpha|^n}{n!}$ tende a 0 per il criterio del rapporto). Pertanto a_n si comporta come b_n, ovvero tende a $+\infty$ se $\alpha > 0$ (ad esempio se $\alpha = 3$), tende a 1 se $\alpha = 0$ e tende a 0^+ se $\alpha < 0$ (ad esempio se $\alpha = -\frac{1}{3}$).

- Per e_n :

Scriviamo $a_n = b_n - c_n$, con $b_n = \frac{n^\alpha}{|\alpha|^n+n}$ e $c_n = \operatorname{arctg}(e^{\alpha n}+2)$. • Se $\alpha < 0$ la successione b_n tende sempre a 0, mentre c_n tende a $\operatorname{arctg} 2$, dunque a_n tende a $-\operatorname{arctg} 2$. • Se $\alpha = 0$ si ha $a_n = \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} 3$, che tende a $-\operatorname{arctg} 3$. • Se $0 < \alpha < 1$ si ha che $b_n = \frac{n^{\alpha-1}}{1+(|\alpha|^n/n)}$ tende a 0, mentre c_n tende a $\frac{\pi}{2}$, dunque a_n tende a $-\frac{\pi}{2}$. • Se $\alpha = 1$ si ha $a_n = \frac{n}{n+1} - \operatorname{arctg}(e^n+2)$, che tende a $1 - \frac{\pi}{2}$. • Infine, se $\alpha > 1$ si ha che $b_n = \frac{n^\alpha}{|\alpha|^n} \frac{1}{1+(n/|\alpha|^n)}$ tende a 0 (infatti $\frac{n^\alpha}{|\alpha|^n}$ tende a 0 per il criterio del rapporto), mentre c_n tende a $\frac{\pi}{2}$, dunque a_n tende a $-\frac{\pi}{2}$.

• Per f_n :

Esaminiamo il limite di $a_n = \frac{|\alpha|^n - 2\sin(\alpha n) - n^{2\alpha}}{n+1}$ nei tre casi richiesti. • Se $\alpha = -2$ si ha $a_n = \frac{2^n + 2\sin 2n - n^{-4}}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}(1 + \frac{2\sin 2n}{2^n} - \frac{n^{-4}}{2^n})$: notando che $\frac{2^n}{n+1}$ tende a $+\infty$ (criterio del rapporto) mentre $\frac{n^{-4}}{|\alpha|^n}$ e $\frac{2\sin 2n}{2^n}$ tendono a 0 (limitata su infinita), si ha che a_n tende a $+\infty$. • Se $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha $a_n = \frac{\frac{1}{2^n} - 2\sin\frac{n}{2} - n}{n+1} = \frac{n}{n+1}(\frac{1}{n2^n} - \frac{2\sin\frac{n}{2}}{n} - 1)$, che tende a -1. • Se $\alpha = 1$ si ha $a_n = \frac{1 - 2\sin n - n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n+1}(\frac{1}{n^2} - \frac{2\sin n}{n^2} - 1)$, che tende a $-\infty$.
Passiamo ora alla discussione del limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. • Se $|\alpha| > 1$ (cioè se $\alpha < -1$ oppure se $\alpha > 1$) conviene raccogliere $|\alpha|^n$ sopra, ottenendo $a_n = \frac{|\alpha|^n}{n+1}(1 - \frac{2\sin(\alpha n)}{|\alpha|^n} - \frac{n^{2\alpha}}{|\alpha|^n})$; poiché allora $\frac{|\alpha|^n}{n+1}$ tende a $+\infty$ e $\frac{n^{2\alpha}}{|\alpha|^n}$ tende a 0 (criterio del rapporto) e $\frac{2\sin(\alpha n)}{|\alpha|^n}$ tende a 0 (limitata su infinita), si ha che a_n tende a $+\infty$. • Se $\alpha = -1$ si ha $a_n = \frac{1 + 2\sin n - n^{-2}}{n+1}$, che tende a 0 (limitata su infinita). • Se $-1 < \alpha \leq 0$ tende analogamente a 0 (per $\alpha = 0$ è identicamente nulla). • Sia ora $0 < \alpha < 1$. In questo caso converrà raccogliere $n^{2\alpha}$ sopra, ottenendo $a_n = \frac{n^{2\alpha}}{n+1}(\frac{|\alpha|^n}{n^{2\alpha}} - \frac{2\sin(\alpha n)}{n^{2\alpha}} - 1)$: la parentesi tende a -1, mentre la frazione $\frac{n^{2\alpha}}{n+1} = n^{2\alpha-1}\frac{n}{n+1}$ tende a 0 se $2\alpha - 1 < 0$, a 1 se $2\alpha - 1 = 0$ e a $+\infty$ se $2\alpha - 1 > 0$. Pertanto la successione tende a 0 se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, tende a -1 se $\alpha = \frac{1}{2}$, e tende a $-\infty$ se $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. • Infine, se $\alpha = 1$ si ha $a_n = \frac{1 - 2\sin n - n^2}{n+1}$, che tende a $-\infty$.

• Per g_n :

Esaminiamo il limite di $a_n = \frac{n}{(n!)^{\alpha-1} - 2|\alpha|^n}$ nei tre casi richiesti, ricordando che per ogni $\beta > 1$ e $\gamma > 0$ si ha che $\frac{n^\gamma}{\beta^n}$ e $\frac{\beta^n}{n!}$ tendono a 0 (criterio del rapporto). • Se $\alpha = -2$ si ha $a_n = \frac{n}{(n!)^{-3} - 2\,2^n} = \frac{n}{2^n}\frac{1}{\frac{1}{(n!)^3\,2^n} - 2}$, dunque il limite vale 0^-. • Se $\alpha = \frac{1}{2}$ si ottiene $a_n = \frac{n}{(n!)^{-\frac{1}{2}} - 2\,\frac{1}{2^n}}$, e poiché il denominatore tende a 0^- il limite risulta $-\infty$. • Se $\alpha = 2$ si ha $a_n = \frac{n}{n! - 2\,2^n} = \frac{n}{n!}\frac{1}{1 - 2\frac{2^n}{n!}}$, dunque il limite è 0^+.
Passiamo ora alla discussione del limite al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. • Se $\alpha < -1$ raccogliamo $|\alpha|^{n+1}$ sotto, ed è chiaro che a_n tende a 0^-. • Se $\alpha = -1$ il denominatore tende a -2, dunque a_n tende a $-\infty$. • Se $-1 < \alpha < 1$ il denominatore tende a 0^-, dunque a_n tende a $-\infty$. • Se $\alpha = 1$ il denominatore vale -1, dunque a_n tende ancora a $-\infty$. • Infine, se $\alpha > 1$ raccogliamo $(n!)^{\alpha-1}$ sotto, ottenendo $a_n = \frac{n}{(n!)^{\alpha-1}}\frac{1}{1 - 2\frac{|\alpha|^n}{(n!)^{\alpha-1}}}$: poiché $\frac{|\alpha|^n}{(n!)^{\alpha-1}} = (\frac{|\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}|^n}{n!})^{\alpha-1}$ e $\frac{n}{(n!)^{\alpha-1}} = (\frac{n^{\frac{1}{\alpha-1}}}{n!})^{\alpha-1}$ tendono a 0, la successione tende a 0^+.