2 Topologia e convergenza in $\mathbb{R}$

Finora ci siamo occupati sostanzialmente delle proprietà *algebriche* di $\mathbb{R}$, ovvero delle sue proprietà di corpo commutativo totalmente ordinato. Passando a un punto di vista *topologico*, cerchiamo adesso di definire con precisione il concetto di "vicinanza", "prossimità" a un suo punto: anzi, visto che ciò ci servirà per la fondamentale nozione di *limite*, lo faremo anche per l'estensione $\widetilde{\mathbb{R}}$ di $\mathbb{R}$, ottenuta aggiungendo i due "punti all'infinito" $\pm\infty$. Questo studio, se fatto a partire da un insieme qualsiasi, condurrebbe alla nozione astratta di *spazio topologico*: in effetti, quanto diremo sarà facilmente adattabile a un contesto generale, come si vedrà parlando di topologia nel piano $\mathbb{R}^2$ e, più generalmente, nello spazio affine $\mathbb{R}^n$.
Le nozioni topologiche che stiamo per introdurre (aperti, chiusi, intorni...) troveranno subito applicazione nello studio del limite di una *successione* di numeri reali, che a sua volta ci aiuterà a meglio comprendere e allargare le prime. Infine, quanto appreso per le successioni lo useremo per lo studio delle *serie*, ovvero somme infinite.

2.1 La topologia della retta reale e della retta reale estesa

Introduciamo alcune notazioni e terminologie.

- Tra gli intervalli di $\mathbb{R}$, chiameremo *intervalli aperti* quelli che non contengono nessuno dei loro estremi: si tratta dunque di quelli limitati del tipo $]a,b[$ con $a<b$, o delle semirette del tipo $]a,+\infty[$ oppure $]-\infty,a[$ per qualche $a\in\mathbb{R}$, o di tutto $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$. **Intervalli aperti**
- Se $x_0\in\mathbb{R}$ e $r>0$, considereremo la *palla aperta di raggio r in x_0* **Palla aperta**
$$B_{x_0}(r) \ := \ ]x_0-r,x_0+r[\ = \ \{x\in\mathbb{R}:|x-x_0|<r\}\,,$$
e similmente $\overline{B}_{x_0}(r)=[x_0-r,x_0+r]=\{x\in\mathbb{R}:|x-x_0|\le r\}$, $B^-_{x_0}(r)=]x_0-r,x_0]$ e $B^+_{x_0}(r)=[x_0,x_0+r[$: si tratta di intervalli centrati (oppure solo da un lato) in x_0 di raggio r, con gli estremi compresi o no.[48]

La topologia euclidea di $\mathbb{R}$ Il primo passo è la definizione di (sottoinsieme) aperto.

Diremo che $A\subset\mathbb{R}$ è un (sottoinsieme) *aperto in* $\mathbb{R}$ se si può esprimere come unione di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ (inoltre, per definizione, anche $\varnothing$ è aperto in $\mathbb{R}$). La famiglia di tutti gli aperti di $\mathbb{R}$ si dirà la *topologia (euclidea) di* $\mathbb{R}$. **Aperto** **Topologia**
Diremo invece che $A\subset\mathbb{R}$ è *chiuso in* $\mathbb{R}$ se il complementare $\complement_{\mathbb{R}}A=\mathbb{R}\setminus A$ è aperto in $\mathbb{R}$. **Chiuso**

[48] La notazione "B" richiama la parola inglese "ball", è scelta per pensare a essi come a "palline unidimensionali" centrate in x_0.

In particolare, A si dirà *compatto* se è chiuso e limitato.[49] **Compatto**

Esempi. **(1)** Tutti gli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ (compreso $\mathbb{R}$) sono aperti di $\mathbb{R}$, mentre tutti gli intervalli chiusi di $\mathbb{R}$ (cioè del tipo $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ e $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$) sono chiusi di $\mathbb{R}$. Tra essi, i soli compatti sono quelli del tipo $[a,b]$. **(2)** Si dimostra che $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ sono i soli sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ad essere sia aperti che chiusi in $\mathbb{R}$. **(3)** $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e i sottoinsiemi finiti (cioè con un numero finito di elementi) $\{a_1,\dots,a_n\}$ sono chiusi in $\mathbb{R}$; inoltre i sottoinsiemi finiti sono compatti, mentre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ no (infatti non sono limitati). **(4)** $\mathbb{Q}$ e $\widetilde{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ non sono ne' aperti ne' chiusi in $\mathbb{R}$, perché nessuno dei due può essere aperto in $\mathbb{R}$ (infatti, a causa della densità in $\mathbb{R}$ di entrambi, nessun intervallo aperto di $\mathbb{R}$ può essere contenuto in essi).

La seguente caratterizzazione alternativa dell'essere "aperto" ci prepara alla successiva nozione di "intorno" di cui parleremo tra breve.

Proposizione 2.1.1. *$A\subset\mathbb{R}$ è aperto se e solo se per ogni $x\in A$ esiste $r>0$ tale che $B_x(r)\subset A$, ovvero se e solo se A contiene una palla aperta centrata in ogni suo punto.*

Dimostrazione. Se A è un aperto allora $A=\bigcup_{j\in J} I_j$ ove gli I_j sono intervalli aperti di $\mathbb{R}$, dunque, preso un $x\in A$, tale x deve stare in uno di questi intervalli, diciamo in I_{j_0}: esiste allora certamente $r>0$ tale che $B_x(r)\subset I_{j_0}$, ed essendo $I_{j_0}\subset A$ si conclude. Viceversa, per ogni $x\in A$ si scelga $r_x>0$ tale che $B_x(r_x)\subset A$: poiché allora $A=\bigcup_{x\in A} B_x(r_x)$, A è aperto. □

Corollario 2.1.2. *Ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ che sia chiuso e inferiormente* (risp. *superiormente*) *limitato ammette minimo* (risp. *massimo*) *in $\mathbb{R}$. In particolare, un sottoinsieme compatto ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $B\subset\mathbb{R}$ un chiuso non vuoto e inferiormente limitato: allora esiste $\xi:=\inf B\in\mathbb{R}$. Supponiamo per assurdo che $\xi\notin B$: poiché $A:=\mathbb{R}\setminus B$ è aperto, per la Proposizione 2.1.1 esiste $r>0$ tale che $B_\xi(r)\subset A$, ovvero tale che $B_\xi(r)\cap B=\varnothing$. Ma ciò contraddice subito la seconda proprietà caratteristica dell'inf. Dunque $\xi\in B$, ovvero $\xi=\min B$. L'asserzione per il massimo si prova analogamente. □

Esempi. **(1)** Un intervallo del tipo $[a,b[$ con $a,b\in\mathbb{R}$ non è ne' aperto (infatti $[a,b[$ non contiene una palla aperta centrata nel suo punto a) ne' chiuso (infatti $[a,b[$ è superiormente limitato, ma non ammette massimo). **(2)** Idem per $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$: non è ne' aperto (infatti non contiene una palla aperta centrata nel suo punto $\frac{1}{2}$) ne' chiuso (infatti è inferiormente limitato, ma non ammette minimo). Invece $B=A\cup\{0\}$ è chiuso (infatti il suo complementare $\mathbb{R}_{<0}\ \cup\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\ \cup\ \mathbb{R}_{>1}$ è aperto).

Passiamo ora alla nozione di "intorno" di un punto.

Se $x_0\in\mathbb{R}$ e $A\subset\mathbb{R}$, diremo che A è un *intorno di x_0 in $\mathbb{R}$* se contiene un aperto contenente x_0, ovvero (per la Proposizione 2.1.1) se contiene qualche palla aperta centrata in x_0: in particolare, ciò implica che $x_0\in A$.[50] La famiglia $\mathcal{B}_{x_0}=\{B_{x_0}(r):r>0\}$ è una *base di intorni di x_0*, nel senso che essa ha la proprietà che ogni intorno di x_0 contiene qualche **Intorno** **Base di intorni**

[49] La definizione di *compattezza* più adatta ad essere generalizzata non è quella appena data: tuttavia, per $\mathbb{R}$ tale definizione, che non daremo in questo corso, si dimostra essere equivalente a chiusura più limitatezza, dunque per semplicità assumiamo quest'ultima come nozione di compattezza in $\mathbb{R}$.

[50] Dunque, un intorno A di x_0 è un sottoinsieme che "circonda" x_0; se lo circonda solo da un lato, si parlerà di *intorno sinistro* (risp. *destro*) di x_0 in $\mathbb{R}$, ovvero se esiste $r>0$ tale che $B^-_{x_0}(r)\subset A$ (risp. $B^+_{x_0}(r)\subset A$. Talvolta si parla di intorno anche come "intorno bilatero" per sottolineare il concetto "destro e sinistro".

elemento di $\mathcal{B}_{x_0}$.[51] La nozione di intorno è quella che designa la "vicinanza": ad esempio, diremo che una proprietà $\mathrm{P}(x)$ (dipendente da $x \in \mathbb{R}$) vale *attorno* (o *vicino*) a $x_0 \in \mathbb{R}$ se l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}(x) \text{ è vera}\}$ è un intorno di x_0.

Si noti che la definizione di "intorno" è stata data poggiando su quella di "aperto"; ma, poiché ora la Proposizione 2.1.1 si può rileggere dicendo che *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}$ *è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto*, avremmo potuto iniziare questo paragrafo nell'ordine inverso, prima definendo gli intorni di un punto come quelli che contengono qualche palla aperta centrata nel punto, e poi gli aperti di $\mathbb{R}$ come quei sottoinsiemi che sono intorno di ogni loro punto.

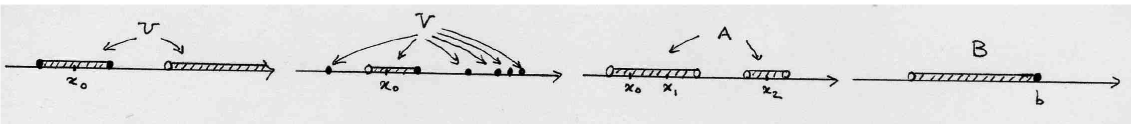


Figura 2.1: U e V sono entrambi intorni di x_0; A è aperto (si noti che è intorno di ogni suo punto); B non è aperto (si noti che non è intorno del suo punto b).

Esempi. **(1)** $A = [0,1[$ è un intorno di $x_0 = \frac{1}{2}$ (infatti $B_{x_0}(\frac{1}{3}) \subset A$), ed è intorno di tutti i suoi punti tranne 0 (infatti, non esiste nessun $r > 0$ tale che $B_0(r) \subset A$). **(2)** $A =]0,1[\cup \{2\} \cup \mathbb{R}_{\geq 3}$ non è un intorno né di -31 né di 1 (basta notare che nessuno dei due sta in A), è un intorno di $\frac{1}{2}$ (perché $B_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{5}) \subset A$) ma non di 2 e nemmeno di 3 (entrambi stanno in A, ma non esiste $r > 0$ tale che $B_{x_0}(r) \subset A$ per $x_0 = 2, 3$). È intorno destro di 3, ed è intorno di tutti i punti $x_0 \in]0,1[\cup \mathbb{R}_{>3}$. **(3)** $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q}$ e $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non sono intorno di alcuno dei loro punti.

Proposizione 2.1.3. (Proprietà degli aperti, dei chiusi, degli intorni di un punto)

(i) *Unioni* qualsiasi *e intersezioni* finite *di aperti sono ancora degli aperti.*
Lo stesso vale per gli intorni di un punto: unioni qualsiasi *e intersezioni* finite *di intorni di un punto* x_0 *sono ancora degli intorni del punto* x_0.

(ii) *Unioni* finite *e intersezioni* qualsiasi *di chiusi sono ancora dei chiusi.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia qualsiasi di aperti, e sia $A = \bigcup_{i \in I} A_i$: se $x_0 \in A$, allora esiste $i_0 \in I$ tale che $x_0 \in A_{i_0}$ e dunque esiste $r > 0$ tale che $B_{x_0}(r) \subset A_{i_0} \subset A$. Perciò A è aperto di $\mathbb{R}$. Sia invece $\{B_i : i = 1, \dots, n\}$ una famiglia finita di aperti e sia $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$: se $x_0 \in B$, vale $x_0 \in B_i$ per ogni i, e dunque per ogni i esiste $r_i > 0$ tali che $B_{x_0}(r_i) \subset A_i$ (ove $i = 1, \dots, n$): posto $r = \min\{r_i : i = 1, \dots, n\}$ (vale $r > 0$, perché gli r_i sono in numero finito) si ha $B_{x_0}(r) \subset B_{x_0}(r_i) \subset B_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e dunque $B_{x_0}(r) \subset B$, col che si è mostrato che B è aperto. In modo simile si prova l'enunciato sugli intorni di un punto x_0. Per dimostrare le affermazioni sui chiusi, basta notare che, se X è un insieme e $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia di sottoinsiemi di X, vale $\complement_X \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \left(\complement_X A_i\right)$ e $\complement_X \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \left(\complement_X A_i\right)$. $\square$

Esempi. **(1)** A margine della Proposizione 2.1.3, è opportuno osservare che *l'intersezione di una famiglia qualsiasi di aperti non sempre è aperta* (ad esempio, l'intersezione della famiglia infinita $\{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}\}$ di intervalli aperti è $\{0\}$, che non è aperto in $\mathbb{R}$) e che similmente *l'unione di una famiglia qualsiasi di chiusi di*

[51] In generale, ogni famiglia di intorni di x_0 che gode della suddetta proprietà si dice essere una "base di intorni di x_0": ad esempio, lo sono anche anche $\{\overline{B}_{x_0}(r) : r > 0\}$, oppure $\{]x_0 - \frac{r}{2}, x_0 + r] : r > 0\}$.

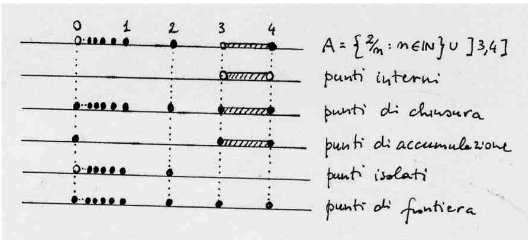
$\mathbb{R}$ *non sempre è chiusa in* $\mathbb{R}$ (ad esempio, l'unione della famiglia infinita $\{[-\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$ di intervalli chiusi è $]-1,1[$, che non è chiuso in $\mathbb{R}$). **(2)** L'insieme $A = \{-3, 0, 1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ perché è l'unione *finita* dei tre chiusi $\{-3\}$, $\{0\}$ e $\{1\}$ (oppure, perché il suo complementare $\complement_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R}_{<-3} \cup]-3,0[\cup]0,1[\cup \mathbb{R}_{>1}$ è aperto di $\mathbb{R}$ in quanto unione di aperti di $\mathbb{R}$). Anche l'insieme $B = \mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{R}$, ma non lo si dimostra dicendo che esso è l'unione della famiglia di chiusi $\{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$ (infatti l'unione di una famiglia infinita di chiusi non è detto sia chiusa), ma dicendo che il suo complementare $\complement_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ è aperto in $\mathbb{R}$ (perché unione di aperti).

Siano ora $x_0 \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$ (non necessariamente aperto né chiuso). Il punto x_0, appartenga egli o meno ad A, può avere varie relazioni con A: andiamo a descriverne alcune.

Il punto x_0 si dirà essere

(a) *punto interno* di A in $\mathbb{R}$ se A è intorno di x_0 (in particolare, $x_0 \in A$); **Punto interno**
(b) *punto di chiusura* di A in $\mathbb{R}$ se $A \cap U \neq \varnothing$ per ogni intorno U di x_0; **Punto di chiusura**
(c) *punto di accumulazione* per A in $\mathbb{R}$ se $A \cap (U \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ per ogni intorno U di x_0; **Punto di accumulazione**
(d) *punto isolato* di A se $x_0 \in A$ ed esiste un intorno U di x_0 tale che $U \cap A = \{x_0\}$; **Punto isolato**
(e) *punto di frontiera* per A se è di chiusura sia per A che per $\complement_{\mathbb{R}} A$. **Punto di frontiera**

Diamo alcune spiegazioni per meglio illustrare queste proprietà.



(a) I punti interni di A stanno in A, ed il loro insieme (detto *interno di A*) si denota con $\dot{A}$ o con $\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A$ se si vuole insistere su "interno in $\mathbb{R}$": vale $\dot{A} \subset A$, e $\dot{A}$ è il più grande aperto di $\mathbb{R}$ contenuto in A; in particolare, $\dot{A} = A$ se e solo se A è aperto. **Interno**

(b) L'idea è: in tutti gli intorni di x_0 cadono punti di A (si può dire anche: $A \cap B_{x_0}(r) \neq \varnothing$ per ogni $r > 0$, ovvero che per ogni $r > 0$ esiste $x \in A$ tale che $|x - x_0| < r$). Tutti i punti di A sono di chiusura per A, ma non è detto valga il viceversa. Il loro insieme (detto *chiusura* o *aderenza* di A) si denota con $\overline{A}$ o con $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}} A$ se si vuole insistere su "chiusura in $\mathbb{R}$", e $\overline{A}$ è il più piccolo chiuso di $\mathbb{R}$ contenente A: in particolare, $A = \overline{A}$ se e solo se A è chiuso di $\mathbb{R}$. **Chiusura (o "aderenza")**

(c) La definizione è più esigente di quella di "chiusura": infatti l'idea è che in tutti gli intorni di x_0 cadono punti di A *diversi da* x_0 (si può dire anche: per ogni $r > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x \neq x_0$ e $|x - x_0| < r$), e dunque tutti i punti di accumulazione sono anche di chiusura per A in $\mathbb{R}$. Anche i punti di accumulazione non è detto stiano in A, anzi, il caso più interessante è proprio quello in cui non ci stanno: e non è difficile vedere che questi ultimi sono tutti e soli gli elementi di $\overline{A} \setminus A$: in altre parole, i punti di $\overline{A}$ sono tutti quelli di A più quelli di $\complement_{\mathbb{R}} A$ che sono di accumulazione per A. Notiamo allora che *$A \subset \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se esso contiene tutti i suoi punti di accumulazione.* L'insieme dei punti di accumulazione di A è detto *derivato di A*. **Derivato**

(d) L'idea è: sono i punti di A "isolati da tutti gli altri di A" (il punto x_0 ha un intorno nel quale esso è l'unico punto di A). Essi sono dunque tutti i punti di A che non sono di accumulazione per A.

(e) È come dire: x_0 è un punto che non sta né in $\mathrm{int}_{\mathbb{R}} A$ né in $\mathrm{int}_{\mathbb{R}}(\complement_{\mathbb{R}} A)$ (per ogni intorno U di x_0 vale $A \cap U \neq \varnothing$ e $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap U \neq \varnothing$). L'insieme dei punti di frontiera di A è detto *frontiera di A*. **Frontiera**

Esempi. Esaminiamo gli esempi precedentemente proposti (per ognuno di essi indichiamo di seguito l'insieme dei punti interni, di chiusura, di accumulazione, isolati, di frontiera). **(1)** Se $A = [0, 1[$ essi sono $]0, 1[$; $[0, 1]$; $[0, 1]$; $\varnothing$; $\{0, 1\}$. **(2)** Se $A =]0, 1[\cup \{2\} \cup \mathbb{R}_{\geq 3}$ essi sono $]0, 1[\cup \mathbb{R}_{>3}$; $[0, 1] \cup \{2\} \cup \mathbb{R}_{\geq 3}$; $[0, 1] \cup \mathbb{R}_{\geq 3}$; $\{2\}$; $\{0, 1, 2, 3\}$. **(3)** Se $A = \{-3, 0, 1\}$ oppure $A = \mathbb{Z}$ essi sono $\varnothing$; A; $\varnothing$; A; A. **(4)** Se $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ essi sono $\varnothing$; $A \cup \{0\}$; $\{0\}$; A; $A \cup \{0\}$. **(5)** Se $A = \mathbb{Q}$ oppure $A = \widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, essi sono $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\varnothing$, $\mathbb{R}$.

È importante notare che

Proposizione 2.1.4. *Se $A \subset \mathbb{R}$ è superiormente limitato,* $\sup A$ *è di chiusura per A in $\mathbb{R}$* (dunque se $\sup A \notin A$ allora $\sup A$ è di accumulazione per A). *Analogamente, se $A \subset \mathbb{R}$ è inferiormente limitato,* $\inf A$ *è di chiusura per A in $\mathbb{R}$* (dunque se $\inf A \notin A$ allora $\inf A$ è di accumulazione per A).[52]

Dimostrazione. Il fatto che sup (o inf) siano punti di chiusura per A discende direttamente dalle proprietà caratteristiche (vedi Proposizione 1.3.2). L'altra affermazione discende da ciò e dal fatto che, come detto, un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$ se e solo se esso contiene tutti i suoi punti di chiusura. □

Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ si dirà *discreto* se tutti i suoi punti sono isolati (o, analogamente, se non contiene nessuno dei suoi punti di accumulazione); se $A \subset B \subset \mathbb{R}$, A si dirà *denso in B* se ogni punto di B è di chiusura per A, ovvero se $A \subset B \subset \overline{A}$.[53] **Sottoinsieme discreto** **Sottoinsieme denso**

Esempi. **(1)** $\mathbb{Z}$, $\{-3, 0, 1\}$ e $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (ma non $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$) sono sottoinsiemi discreti di $\mathbb{R}$; **(2)** Come detto, $\mathbb{Q}$ e $\widetilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$.

La topologia euclidea di $\widetilde{\mathbb{R}}$ Come preannunciato, definiamo la *retta reale estesa* $\widetilde{\mathbb{R}}$ come l'insieme ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due nuovi punti $-\infty$ e $+\infty$, chiamati rispettivamente "meno infinito" e "più infinito", che converrà pensare "aggiunti alla lontanissima sinistra e destra della retta reale": in effetti l'ordine totale $\leq$ di $\mathbb{R}$ viene esteso a $\widetilde{\mathbb{R}}$, ponendo $-\infty < a < +\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. **Retta reale estesa $\widetilde{\mathbb{R}}$**

[52] Si noti che dalla Proposizione 2.1.4 segue nuovamente il Corollario 2.1.2.

[53] È un facile esercizio mostrare che questa definizione di densità è equivalente a quella usata per mostrare (vedi Corollario 1.3.5) che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$

Passiamo ora allo studio della topologia di $\widetilde{\mathbb{R}}$. Analogamente a prima, se $x_0 \in \mathbb{R}$ un sottoinsieme $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ si chiamerà *intorno* (risp. intorno destro, sinistro) *di* x_0 *in* $\mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che $B_{x_0}(r) \subset A$ (o rispettivamente $B^{\pm}_{x_0}(r) \subset A$). Quanto agli infiniti, un sottoinsieme $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ si dirà *intorno di* $+\infty$ se contiene una semiretta $]a, +\infty]$ per qualche $a \in \mathbb{R}$; e la famiglia di "semirette completate" $]a, +\infty]$ sarà una *base di intorni di* $+\infty$.[54] Nozioni analoghe vengono introdotte per $-\infty$.

La seguente proprietà ci sarà utile parlando di limiti.

Proposizione 2.1.5. ($\widetilde{\mathbb{R}}$ è uno spazio "separato", o "di Hausdorff") *Se x e y sono due elementi distinti di $\widetilde{\mathbb{R}}$, allora esistono intorni U di x e V di y tali che $U \cap V = \varnothing$.*[55]

Dimostrazione. Supposto ad esempio che $x < y$, basta scegliere $U = [-\infty, \alpha[$ e $V =]\beta, +\infty]$ per qualsiasi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $x < \alpha \le \beta < y$. □

Un sottoinsieme $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ è *aperto in* $\widetilde{\mathbb{R}}$ se è intorno in $\widetilde{\mathbb{R}}$ di ogni suo punto (e, per definizione, anche $\varnothing$ è aperto in $\widetilde{\mathbb{R}}$); la famiglia di tutti gli aperti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ si dirà *topologia* (euclidea) *di* $\widetilde{\mathbb{R}}$. Diremo invece che $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ è *chiuso in* $\widetilde{\mathbb{R}}$ se $\complement_{\widetilde{\mathbb{R}}} A = \widetilde{\mathbb{R}} \setminus A$ è aperto in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Le nozioni di *punto interno, di chiusura, di accumulazione, isolato, di frontiera* $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ per $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ si enunciano allo stesso modo delle analoghe nozioni di $\mathbb{R}$ con l'accortezza, ad esempio nel caso $x_0 = +\infty$, di rimpiazzare $B_{x_0}(r)$ con gli intorni di base $]a, +\infty]$ di $+\infty$. Ad esempio:

Proposizione 2.1.6. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ ha $+\infty$ come punto di accumulazione se e solo se non è superiormente limitato.*

Dimostrazione. Il fatto che $+\infty$ sia punto di accumulazione per A significa che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $]a, +\infty] \cap A \neq \varnothing$, ovvero che per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $x \in A$ tale che $x > a$: ma ciò è precisamente come dire che A non è superiormente limitato. □

Possiamo estendere la nozione di sup e inf a sottoinsiemi di $\widetilde{\mathbb{R}}$: se $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ è superiormente (risp. inferiormente) limitato, $\sup A$ (risp. $\inf A$) sarà il numero reale già definito per $\mathbb{R}$; in caso contrario, si pone $\sup A = +\infty$ (risp. $\inf A = -\infty$). Tali numeri soddisferanno ancora le proprietà caratteristiche della Proposizione 1.3.2 e perciò si prova, analogamente alla Proposizione 2.1.4, che se $A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ allora $\sup A$ e $\inf A$ sono di chiusura per A in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Esempi. **(1)** Se $x_0 \in \mathbb{R}$, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ intorni di x_0 in $\mathbb{R}$ continuano ad esserlo anche in $\widetilde{\mathbb{R}}$; gli altri intorni di x_0 in $\widetilde{\mathbb{R}}$ si ottengono aggiungendo uno (o entrambi) dei $+\infty$ ad uno di questi "vecchi" intorni: ad esempio, $]-2, 1] \cup \{-\infty\}$ è un intorno di $x_0 = \frac{1}{2}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$. Per essere un intorno di $+\infty$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$, invece, come detto bisognerebbe contenere una "semiretta aperta completata" $]a, +\infty]$, ed in particolare contenere anche $+\infty$; tuttavia, come già citato in nota, è corrente e del tutto comprensibile l'abuso di linguaggio secondo cui si dice che "la semiretta $]a, +\infty[$ è un intorno di $+\infty$ in $\mathbb{R}$". **(2)** $\mathbb{R}$ è aperto in $\widetilde{\mathbb{R}}$, e tutti i sottoinsiemi $A \subset \mathbb{R}$

[54] Tuttavia, con abuso di linguaggio si usa dire "che la semiretta $]a, +\infty[$ è un intorno di $+\infty$ in $\mathbb{R}$", il che, per essere pignoli, non ha senso perché $+\infty \notin \mathbb{R}$, ma non porta a nessun problema, come vedremo parlando di limiti.

[55] ovvero: elementi distinti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ possono essere "separati" tra loro tramite intorni disgiunti.

aperti in $\mathbb{R}$ lo sono anche in $\mathbb{R}$. Invece, se $C \subset \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$, non è detto che C lo sia anche in $\widetilde{\mathbb{R}}$: ad esempio, la "semiretta chiusa" $\mathbb{R}_{\geq a} = [a, +\infty[$ è chiusa in $\mathbb{R}$ (perché $\complement_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_{\geq a}) = \mathbb{R}_{<a}$ è aperta in $\mathbb{R}$), ma non è chiusa in $\widetilde{\mathbb{R}}$ (perché $\complement_{\widetilde{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}_{\geq a}) = \mathbb{R}_{<a} \cup \{\pm\infty\}$ non è aperta in $\widetilde{\mathbb{R}}$, perché non è intorno di $+\infty$). È facile allora vedere che un chiuso $C \subset \mathbb{R}$ lo è anche in $\widetilde{\mathbb{R}}$ se e solo se esso è limitato in $\mathbb{R}$ (ovvero compatto) mentre invece, se ad esempio C è un chiuso di $\mathbb{R}$ superiormente illimitato, il sottoinsieme "completato" $C \cup \{+\infty\}$ è chiuso in $\widetilde{\mathbb{R}}$ (vedi il prossimo paragrafo). **(3)** Se un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ è limitato, i suoi punti interni, di chiusura, di accumulazione, isolati e di frontiera in $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono gli stessi di quelli in $\mathbb{R}$.

Altre topologie su $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$? Abbiamo visto che la scelta della topologia equivale alla scelta degli intorni: stabilito chi sono gli aperti, si sa dire chi sono gli intorni di un qualsiasi punto (sono "quelli che contengono un aperto contenente il punto stesso") e, viceversa, stabilito chi siano gli intorni dei vari punti, si sa dire chi sono gli aperti (sono "quelli che sono intorno di ogni loro punto"). In altre parole, scegliere una topologia è la stessa cosa che stabilire quale nozione si vuole usare di "vicinanza" (e, con essa, tutte quelle che ne conseguiranno, come "limite", "continuità"...). Ora, in che misura possiamo modificare la scelta di una topologia? In altre parole, quali sono le proprietà che una famiglia di parti di $\mathbb{R}$ (ma, in realtà, ciò si può fare con un qualunque insieme X) deve possedere affinché si possa considerare come "famiglia degli aperti" di X? Per rispondere ci ispiriamo alla Proposizione 2.1.3.

Dato un insieme X non vuoto, una famiglia $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ si dirà una *topologia su X* se soddisfa le seguenti proprietà: (1) $X, \varnothing \in \mathcal{T}$; (2) unioni qualsiasi di elementi di $\mathcal{T}$ sono ancora elementi di $\mathcal{T}$; (3) intersezioni finite di elementi di $\mathcal{T}$ sono ancora elementi di $\mathcal{T}$. In tal caso, la coppia $(X, \mathcal{T})$ si dirà *spazio topologico*. Se $\mathcal{T}$ è una topologia su X, gli elementi di $\mathcal{T}$ si diranno gli *aperti* di X (nel senso dato da $\mathcal{T}$); di conseguenza, dato $x_0 \in X$ si dirà che $A \subset X$ è un intorno di x_0 (nel senso dato da $\mathcal{T}$) se A contiene qualche aperto contenente x_0. Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono due topologie su X con $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, si dirà che $\mathcal{T}_2$ è *più fine* di $\mathcal{T}_1$: l'idea è che, in X, con $\mathcal{T}_2$ "vi sono più aperti" che con $\mathcal{T}_1$, e dunque ogni punto di X ha "più intorni" con $\mathcal{T}_2$ di quanti non ne abbia con $\mathcal{T}_1$. **Spazio topologico**

Esempi. **(1)** Ogni insieme X ha due topologie estremali: quella meno fine di tutte è la *banale* in cui $\mathcal{T} = \{X, \varnothing\}$ (dato $x_0 \in X$, l'unico intorno di x_0 è X), e quella più fine è la *discreta* in cui $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (tutti gli $A \subset X$ che contengono x_0 sono intorni di x_0). **(2)** Su $X = \mathbb{R}$, oltre alla topologia euclidea in cui $\mathcal{T}_e = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ è unione di intervalli aperti}\} \cup \{\varnothing\}$ possiamo considerare ad esempio la *topologia di Zariski* in cui i chiusi di $\mathbb{R}$ sono i soli insiemi finiti, e dunque gli aperti sono $\mathcal{T}_z = \{A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus A \text{ è finito}\} \cup \{\varnothing\}$. Dunque $\mathcal{T}_z$ è meno fine di $\mathcal{T}_e$: dato $x_0 \in \mathbb{R}$, i suoi intorni (nel senso di Zariski) sono i soli sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ottenuti rimuovendo da $\mathbb{R}$ un numero finito di punti diversi da x_0 (si tratta di particolari intorni aperti euclidei). **(3)** Si noti che, con una topologia diversa, le proprietà legate agli intorni possono essere assai diverse. Ad esempio, mentre si era visto che $\mathbb{R}$ con l'usuale topologia euclidea è uno spazio separato (vedi Proposizione 2.1.5), questo non vale più se $\mathbb{R}$ è munito della topologia di Zariski (o di una qualsiasi altra topologia meno fine, tipo la banale), perché gli aperti sono "troppo grossi" e dunque gli intorni di due punti distinti non riescono mai a essere disgiunti tra loro.

2.2 Successioni di numeri reali

Una *successione* di numeri reali è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$: ad ogni $n \in \mathbb{N}$ essa associa dunque un numero reale $a(n)$, detto *termine n-esimo* della successione, che si denota usualmente con a_n (e la successione con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o più semplicemente con $(a_n)_n$, (a_n) oppure solo a_n). **Successione**

Dato $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$, si dirà che ℓ è *limite di* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a* ℓ), e si scriverà $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ oppure $\ell = \lim a_n$, o anche $a_n \to \ell$, se **Limite di una successione**

(2.1) per ogni intorno V di ℓ esiste $n_V \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in V$ per ogni $n \geq n_V$:

in altre parole, se la successione "entra definitivamente in ogni intorno di ℓ".(56) Una successione che non ha limite si dice *indeterminata*. **Successione indeterminata**

La definizione (2.1), che parla solo di "intorni", in principio ha senso per ogni topologia su $\mathbb{R}$ (vedi pag. 68)(57); per quanto riguarda più specificatamente la topologia euclidea, che è quella che *sempre usiamo e useremo salvo avviso contrario*, tale definizione si specializza, a seconda dei casi, come segue:

Proposizione 2.2.1. (Casi particolari della definizione di limite di successione)

- *Se $\ell \in \mathbb{R}$ si dirà che a_n* converge a ℓ, *e* (2.1) *equivale a:* **Successione convergente**

  $$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che se } n \geq n_\varepsilon \text{ allora } |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

  In particolare, se $\ell = 0$ si dirà che la successione a_n è infinitesima. **Successione infinitesima**

- *Se $\ell = +\infty$* (risp. $-\infty$) *si dirà che a_n* diverge a $+\infty$ (risp. $-\infty$)*, e* (2.1) *equivale a:* **Successione divergente**

  $$\text{per ogni } M > 0 \text{ esiste } n_M \in \mathbb{N} \text{ tale che se } n \geq n_M \text{ allora } a_n > M \text{ (risp. } a_n < -M).$$

Dimostrazione. Per verificare (2.1) è sufficiente controllare che essa valga per i V che stanno in una base di intorni di ℓ: allora le riformulazioni appena proposte sono chiare, in quanto se $\ell \in \mathbb{R}$ (risp. $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$) una base di intorni è data da $\{B_\ell(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ (risp. da $\{]M, +\infty[: M > 0\}$, da $\{]-\infty, -M[: M > 0\}$). □

(56) In generale, quando d'ora in poi diremo che una proprietà $\mathrm{P}(n)$ vale **"definitivamente"**, intenderemo che tale proprietà $\mathrm{P}(n)$ vale da un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ in poi, ovvero per $n \geq n_0$. Ad esempio, la successione $a_n = 2n - 33$ è "definitivamente > 0": infatti si ha $a_n > 0$ per $n \geq n_0 = 17$.

(57) In questa ottica relativa, più la topologia è fine più vi sono intorni in cui entrare definitivamente, e dunque più è difficile per una successione avere limite. Prendiamo ad esempio la successione $a_n = \frac{1}{n}$. Per l'usuale topologia euclidea essa converge a 0: infatti ogni intorno di 0 contiene una palla $]-\varepsilon, \varepsilon[$ per qualche $\varepsilon > 0$, dunque la successione entra in tale intorno non appena $n > \frac{1}{\varepsilon}$, possibile per archimedeità. Invece per la topologia di Zariski (e per ogni altra topologia meno fine, fino a quella banale) essa tende a ogni $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$: infatti, preso un qualsiasi ℓ, la successione sta definitivamente in ogni Zariski-intorno di ℓ (ovvero, in ogni insieme del tipo $\widetilde{\mathbb{R}} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ ove $x_1, \dots, x_r$ è un numero finito di punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ diversi da ℓ). All'estremo opposto, per la topologia discreta (la più fine che c'è) essa non tende verso alcun punto di $\widetilde{\mathbb{R}}$, nemmeno a 0: infatti $\{0\}$ è un intorno di 0 in tale topologia, e lì dentro la successione non entra mai.

Notiamo subito che

Proposizione 2.2.2. *Il limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se esiste, è unico.*[(58)]

Dimostrazione. Siano $\ell_1, \ell_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ due limiti per (a_n), e supponiamo per assurdo che essi siano diversi tra loro: allora (vedi Proposizione 2.1.5) esistono due intorni V_1 e V_2 risp. di ℓ_1 e ℓ_2 disgiunti tra loro, ovvero tali che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Per definizione di limite, esistono $n_{V_1} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in V_1$ per ogni $n \geq n_{V_1}$, e $n_{V_2} \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in V_2$ per ogni $n \geq n_{V_2}$: ma allora per ogni $n \geq \max\{n_{V_1}, n_{V_2}\}$ si dovrebbe avere $a_n \in V_1 \cap V_2 = \varnothing$, assurdo. Dunque deve essere $\ell_1 = \ell_2$. □

Esempi. **(0)** Se $k \in \mathbb{R}$ la successione costante $a_n \equiv k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ è ovviamente convergente a $\ell = k$. **(1)** La successione $a_n = \frac{n+1}{n}$ converge a $\ell = 1$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ si ha $|a_n - 1| < \varepsilon$ se e solo se $n > \frac{1}{\varepsilon}$; per archimedeità esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$, dunque se $n \geq n_\varepsilon$ si ha $|a_n - 1| < \varepsilon$. **(2)** La successione $a_n = 2n - n^2$ diverge a $\ell = -\infty$. Infatti, dato $M > 0$ si ha $a_n < -M$ se e solo se $n > \sqrt{M+1} + 1$; sempre per archimedeità esiste $n_M \in M$ tale che $n_M > \sqrt{M+1} + 1$, dunque se $n \geq n_M$ si ha $a_n < -M$. **(3)** Non è detto che il limite di una successione esista: ad esempio $a_n = (-1)^n$ (che oscilla tra 1 e -1) è indeterminata, così come $b_n = (-1)^n\, n$ (che assume valori sempre più grandi in valore assoluto, ma oscillanti nel segno). Tuttavia, in un caso come l'ultimo (in cui $|b_n| \to +\infty$) si usa dire comunque che $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende a* ∞ (senza segno). **(4)** Se $\alpha \in \mathbb{R}$, la successione $a_n = n^\alpha$ è infinitesima per $\alpha < 0$ (ad esempio, $\frac{1}{n}$ oppure $\frac{1}{\sqrt{n}}$), costantemente 1 per $\alpha = 0$ e divergente a $+\infty$ per $\alpha > 0$ (ad esempio, $\sqrt[3]{n}$ oppure n^2). **(5)** Fissato un $\alpha \in \mathbb{R}$ la *successione aritmetica* di differenza α è data da $a_n = n\alpha$ (ovvero, $a_1 = \alpha$, $a_2 = 2\alpha$, ...): è immediato mostrare che essa diverge a $\pm\infty$ a seconda che $\alpha \gtrless 0$, mentre è la successione costante nulla se $\alpha = 0$.

Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la successione $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definita da $b_k := a_{\nu(k)}$ è detta *sottosuccessione* di a_n: l'idea è che la funzione ν "estrae da a_n solo alcuni di suoi valori, facendoli diventare una nuova successione". È d'uso comune denotare $a_{\nu(k)}$ con a_{n_k} (nel senso che n_k è il "k-esimo indice selezionato" dalla sottosuccessione. **Sottosuccessione**

Esempi. **(0)** Nel caso in cui ν sia l'identità di $\mathbb{N}$, si ottiene la successione stessa. **(1)** Data $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la sottosuccessione degli elementi di posto pari si ottiene con $\nu(k) = 2k$ (dunque $b_1 = a_2$, $b_2 = a_4$, ..., $b_k = a_{2k}$) e quella degli elementi di posto dispari con $\nu(n) = 2k - 1$ (dunque $b_1 = a_1$, $b_2 = a_3$, ..., $b_k = a_{2k-1}$). Ad esempio, la sottosuccessione degli elementi di posto pari (risp. dispari) di $a_n = (-1)^n$ è la successione costante 1 (risp. -1).

Il legame tra il limite di una successione e quello delle sue sottosuccessioni è il seguente:

Proposizione 2.2.3. *Una successione ha limite ℓ se e solo se tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite ℓ.*

Dimostrazione. Poiché tra le sottosuccessioni di una successione c'è lei stessa, la condizione è ovviamente sufficiente. Viceversa, supponiamo che $a_n \to \ell$ e sia $b_k = a_{\nu(k)}$ una sua sottosuccessione: se V è un intorno di ℓ sappiamo che $a_n \in V$ da un certo n_V in poi, ma allora (visto che ν è strettamente crescente, dunque $\nu(n) \geq n$) anche b_k sta in V da n_V in poi, dunque anche $b_k \to \ell$. □

[(58)]Nella dimostrazione che segue si usa in modo cruciale il fatto che la topologia considerata su $\widetilde{\mathbb{R}}$ (quella euclidea) è *separata* (vedi Proposizione 2.1.5): in realtà, se considerassimo una topologia non separata, il limite sarebbe lungi dall'essere unico, come visto ad esempio in nota per $a_n = \frac{1}{n}$ con la topologia di Zariski o una qualsiasi meno fine, come quella banale.

Perciò, se si trovano due sottosuccessioni di a_n con limiti diversi (o se si trova una sottosuccessione indeterminata), allora a_n è indeterminata.

Esempio. Le sottosuccessioni di posto pari/dispari della successione $a_n = (-1)^n$ sono risp. la costante 1 e -1, dunque convergono risp. a 1 e a -1: pertanto $(-1)^n$ è indeterminata (come già sappiamo).

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dirà *limitata* se l'insieme dei suoi valori $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato (come sottoinsieme di $\mathbb{R}$), ovvero se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. **Successione limitata**

Proposizione 2.2.4. *Ogni successione convergente è limitata, ma non viceversa.*

Dimostrazione. Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n \ge n_0$ allora $|a_n - \ell| < 1$: si ha allora $|a_n| < M := \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |\ell - 1|, |\ell + 1|\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero a_n è limitata. Invece $(-1)^n$ è una successione limitata, ma non converge. $\square$

Raduniamo nel seguente enunciato alcuni teoremi standard sui limiti di successioni.

Proposizione 2.2.5. *Siano* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *successioni in* $\mathbb{R}$.

(a) (Permanenza del segno) *Se* $\lim a_n < \lim b_n$, *allora* $a_n < b_n$ *definitivamente.*

In particolare:

Se $\lim a_n > \alpha$ *per un certo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *allora* $a_n > \alpha$ *definitivamente.*

(b) (Confronto) *Se* $a_n \le b_n$ *definitivamente, allora (se esistono)* $\lim a_n \le \lim b_n$.[(59)]

In particolare:

Se $a_n \le \alpha$ *definitivamente per un certo* $\alpha \in \mathbb{R}$, *allora (se esiste)* $\lim a_n \le \alpha$.

(c) (Teoremi dei "carabinieri")

(i) *Se* $a_n \le b_n \le c_n$ *definitivamente, e se esistono uguali* $\lim a_n = \lim c_n \in \mathbb{R}$, *allora anche* $\lim b_n$ *esiste e sarà uguale ad essi.*

(ii) *Sia* $a_n \le b_n$ *definitivamente. Se* $\lim a_n = +\infty$, *allora anche* $\lim b_n = +\infty$*; se* $\lim b_n = -\infty$, *allora anche* $\lim a_n = -\infty$.

(d) (Limiti e operazioni)

(i) *Se esistono* $\lim a_n = \ell_1 \in \mathbb{R}$ *e* $\lim b_n = \ell_2 \in \mathbb{R}$, *allora esistono* $\lim(a_n + b_n)$ *e* $\lim(a_n b_n)$, *e sono uguali rispettivamente a* $\ell_1 + \ell_2$ *e a* $\ell_1 \ell_2$.

(ii) *Se* $\lim a_n = +\infty$ (risp. $-\infty$) *e* b_n *è inferiormente* (risp. superiormente) *limitata, allora* $\lim(a_n + b_n)$ *esiste ed è uguale a* $+\infty$ (risp. a $-\infty$).

(iii) *Se* a_n *è infinitesima e* b_n *è limitata, allora* $a_n b_n$ *è infinitesima.*

[(59)] Si rimarca l'importanza dei dettagli dell'enunciato: nella permanenza del segno si va "dal limite alla successione" e si usa "$<$", mentre per il confronto si va "dalla successione al limite" e si usa "$\le$". Ad esempio, una versione del confronto con "$<$" è falsa, come mostrano $a_n = -\frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$ (vale $a_n < b_n$, ma sono entrambe infinitesime e dunque $\lim a_n \not< \lim b_n$).

(iv) *Se* $\lim a_n = \pm\infty$ *e* $b_n > 0$ *è "lontana da* 0*" (cioè esiste* $\alpha > 0$ *tale che* $b_n > \alpha$ *definitivamente), allora* $\lim(a_n b_n)$ *esiste ed è uguale a* $\pm\infty$.

(v) *Se esiste* $\ell = \lim a_n \in \mathbb{R}^\times$ *, allora la successione* $\frac{1}{a_n}$ *ha senso definitivamente, esiste* $\lim \frac{1}{a_n}$ *ed è uguale a* $\frac{1}{\ell}$.

(vi) *Se* $a_n > 0$ *definitivamente e* $\lim a_n = 0$ (risp. $\lim a_n = +\infty$) *la successione* $\frac{1}{a_n}$ *ha senso definitivamente, esiste* $\lim \frac{1}{a_n}$ *ed è uguale a* $+\infty$ (risp. a 0).

Dimostrazione. (a) Siano $\ell_1 = \lim a_n$ e $\ell_2 = \lim b_n$ con $\ell_1 < \ell_2$, e siano V_1 e V_2 intorni di ℓ_1 e ℓ_2 con $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (vedi Proposizione 2.1.5), da cui $y_1 < y_2$ per ogni $y_1 \in V_1$ e $y_2 \in V_2$; poiché $a_n \in V_1$ e $b_n \in V_2$ definitivamente, si ha quanto voluto. L'altra affermazione si ottiene applicando quanto trovato alla successione costante α. (b) Siano $\ell_1 = \lim a_n$, $\ell_2 = \lim b_n$ e supponiamo per assurdo che sia $\ell_1 \not\leq \ell_2$, ovvero $\ell_1 > \ell_2$; per la permanenza del segno si ha allora $a_n > b_n$ definitivamente, ma ciò nega l'ipotesi. L'altra affermazione si ottiene applicando quanto trovato alla successione costante α. (c) (i) Per il confronto, se $\lim b_n$ esiste deve essere uguale a $\alpha := \lim a_n = \lim c_n$, ed è proprio così: infatti a_n e c_n entrano definitivamente in ogni palla centrata in α, dunque lo stesso deve fare b_n. (ii) Se ad esempio $\lim a_n = +\infty$ allora per il confronto deve essere (se esiste) $\lim b_n = +\infty$, ed è proprio così: infatti, dato $M > 0$ si ha $b_n \geq a_n \geq M$ definitivamente. (d) (i) Sia $\varepsilon > 0$. Da $|(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(a_n - \ell_1) + (b_n - \ell_2)| \leq |a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2|$, poiché si ha definitivamente $|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ si ricava che $|(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon$ definitivamente, ovvero che $\lim(a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$. Passiamo ora al prodotto. Notiamo innanzitutto che esiste $M > 0$ tale che $|b_n| < M$ per ogni n (infatti b_n è limitata perché convergente), dunque si ha $|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| = |a_n b_n - \ell_1 b_n + \ell_1 b_n - \ell_1 \ell_2| = |b_n(a_n - \ell_1) + \ell_1(b_n - \ell_2)| \leq |b_n|\,|a_n - \ell_1| + |\ell_1|\,|b_n - \ell_2| \leq M\,|a_n - \ell_1| + L\,|b_n - \ell_2|$ per un qualsiasi $L > |\ell_1|$, e ciò mostra che $a_n b_n$ converge a $\ell_1 \ell_2$ (infatti $|a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$ e $|b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2L}$ definitivamente, dunque $|a_n b_n - \ell_1 \ell_2| < M \frac{\varepsilon}{2M} + L \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon$ definitivamente). (ii) Sia ad esempio $\lim a_n = +\infty$ e b_n inferiormente limitata, diciamo $b_n \geq \alpha$ per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$. Preso $M > 0$, si ha che $a_n > M - \alpha$ definitivamente, dunque $a_n + b_n > (M - \alpha) + \alpha = M$ definitivamente, e ciò prova che $a_n + b_n$ tende a $+\infty$. (iii) Sia $K > 0$ tale che $|b_n| < K$ per ogni n. Preso $\varepsilon > 0$, sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n| < \varepsilon/K$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$: allora $|a_n b_n| < (\varepsilon/K)K = \varepsilon$. Lasciamo il resto per esercizio. □

Esempi. (1) Sia $a_n = \frac{\sin n}{n}$: poiché $-1 \leq \sin n \leq 1$ si ha $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$, dunque $a_n \to 0$ per il teorema dei due carabinieri. **(2)** Sia $b_n = \frac{2 - \sin n}{\pi - 2 \operatorname{arctg} n}$: poiché $2 - \sin n > \alpha = \frac{1}{2}$ e $\pi - 2 \operatorname{arctg} n > 0$ tende a 0 (dunque $\frac{1}{\pi - 2 \operatorname{arctg} n} \to +\infty$), si ha $b_n \to +\infty$. **(3)** Sia $c_n = 3 \sin n + 2 \operatorname{arctg} n - n$: poiché $3 \sin n + 2 \operatorname{arctg} n$ è superiormente limitata (da $3 + \pi$), si ha $c_n \to -\infty$.

Forme indeterminate

Restano alcuni casi (detti *forme indeterminate*) che coinvolgono operazioni e che non sono risolti dalla proposizione precedente. I più classici[60] sono $\pm\infty \mp \infty$ (ovvero, se ad esempio $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = -\infty$, nulla si può dire in generale su $\lim(a_n + b_n)$), e poi $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Le successioni in forma indeterminata (che sono in realtà le sole successioni veramente interessanti) vanno esaminate con uno studio specifico.

Esempi. (1) La successione $a_n = 7n - 2n^2$ dà una forma indeterminata $+\infty - \infty$; tuttavia, essendo $a_n = n^2(\frac{7}{n} - 2)$, poiché $n^2 \to +\infty$ e $\frac{7}{n} - 2 \to -2$ (perché $\frac{7}{n}$ è infinitesima) si ha $\lim a_n = -\infty$. **(2)** [In questo esercizio si usa la continuità delle funzioni "coseno" e "seno", che sarà provata più avanti: ovvero se $b_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora $\sin(b_n) \to \sin(\ell) \in \mathbb{R}$ e $\cos(b_n) \to \cos(\ell) \in \mathbb{R}$. Si veda più sotto per maggiori dettagli.] La successione $b_n = n \sin \frac{1}{n}$ è in forma indeterminata $\infty \cdot 0$; tuttavia per n abbastanza grande si ha $\sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \operatorname{tg} \frac{1}{n}$, da cui (dividendo per $\sin \frac{1}{n} > 0$ e passando ai reciproci) $\cos \frac{1}{n} < a_n < 1$; poiché le

[60] anche perché gli altri sono solitamente riconducibili ad essi tramite procedimenti standard, come vedremo più tardi.

due successioni negli estremi hanno limite 1, basta applicare il teorema dei due carabinieri per concludere che $\lim a_n = 1$.

$\boxed{\textbf{Successioni monotòne}}$ Una successione (a_n) si dice *monotòna* se è crescente (cioè: se $m < n$ implica $a_m \le a_n$) oppure se è decrescente (cioè: se $m < n$ implica $a_m \ge a_n$).[61] Una tale successione non è mai indeterminata: **Successione monotona**

Proposizione 2.2.6. *Una successione monotona crescente* (risp. decrescente) (a_n) *ha limite* $\ell = \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (risp. $\ell = \inf_{\widetilde{\mathbb{R}}}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$) *: dunque essa converge in* $\mathbb{R}$ *oppure diverge a* $+\infty$ (risp. a $-\infty$).
In particolare, una successione monotona e limitata è convergente.

Dimostrazione. Sia ad esempio a_n crescente (l'altro caso si mostra in modo analogo), e sia $\ell = \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}}\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$: potrebbe dunque essere $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $\ell = +\infty$. Nel primo caso ($\ell \in \mathbb{R}$), dato $\varepsilon > 0$ mostriamo che a_n sta definitivamente in $B_\ell(\varepsilon)$: infatti, poiché $\ell - \varepsilon < \ell$, per le proprietà caratteristiche del sup esiste n_ε tale che $\ell - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le \ell$, ma allora essendo a_n crescente si ha $\ell - \varepsilon < a_n \le \ell$ per ogni $n \ge n_\varepsilon$, come si voleva. Se invece $\ell = +\infty$, dato $M > 0$ mostriamo che a_n sta definitivamente in $]M, +\infty[$: in effetti esiste n_M tale che $a_{n_M} > M$, ma allora $a_n > M$ per ogni $n \ge n_M$. □

Inoltre, le successioni monotone appaiono (come sottosuccessioni) dentro ogni successione:

Proposizione 2.2.7. *Ogni successione ammette una sottosuccessione monotona. In particolare, ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. La seconda affermazione discende subito dalla prima, tenendo presente che ogni sottosuccessione di una successione limitata è ovviamente limitata e poi ricordando la Proposizione 2.2.6; dedichiamoci ora alla dimostrazione della prima. Sia a_n una successione, e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei suoi valori: distingueremo tre casi. (1) Se A è un insieme finito, vuol dire che la successione assume infinite volte uno stesso valore, ovvero che esistono $\alpha \in \mathbb{R}$ e un sottoinsieme infinito $\{m_1, m_2, m_3, \dots\} \subset \mathbb{N}$ (ove si intende che $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$) tale che $a_{m_k} = \alpha$ per ogni $k \in \mathbb{N}$: ma allora la sottosuccessione a_{m_k} (si noti che la funzione $\nu(k) = m_k$ è strettamente crescente) è la costante α, dunque è monotona. (2) Sia ora A un insieme infinito, e si supponga che esista un sottoinsieme $B \subset A$ infinito e privo di minimo: costruiremo allora una sottosuccessione strettamente decrescente a_{m_n}. Posto $\xi := \inf_{\widetilde{\mathbb{R}}} B$ si ha di certo $\xi \notin B$ (perché altrimenti ξ sarebbe il minimo di B); scelto un qualsiasi $a_{m_1} \in B$, sia $b_1 = \min\{a_n \in B : n \le m_1\}$ (tale minimo esiste, perché l'insieme in questione è finito): essendo $\xi < b_1$, per (Inf2) esisterà $a_{m_2} \in B$ tale che $\xi < a_{m_2} < b_1$, e per come è definito b_1 sarà di certo $m_2 > m_1$ e $a_{m_1} > a_{m_2}$. Di nuovo, sia $b_2 = \min\{a_n \in B : n \le m_2\}$: essendo $\xi < b_2$, per (Inf2) esisterà $a_{m_3} \in B$ tale che $\xi < a_{m_3} < b_2$, e per come è definito b_2 sarà di certo $m_3 > m_2$ e $a_{m_2} > a_{m_3}$; procedendo così, si costruisce la sottosuccessione cercata. (3) L'ultimo caso è quello in cui A è un insieme infinito tale che ogni suo sottoinsieme non vuoto abbia minimo: in questo caso costruiremo una sottosuccessione strettamente crescente a_{m_n}. Sia $a_{m_1} = \min A$. Poiché $\{a_n : n \le m_1\}$ è finito, $A \setminus \{a_n : n \le m_1\}$ è non vuoto, dunque ammette minimo: se $a_{m_2} = \min(A \setminus \{a_n : n \le m_1\})$, di certo sarà $m_2 > m_1$ e $a_{m_2} > a_{m_1}$. Di nuovo, poiché $\{a_n : n \le m_2\}$ è finito, $A \setminus \{a_n : n \le m_2\}$ è non vuoto, dunque ammette minimo: se $a_{m_3} = \min(A \setminus \{a_n : n \le m_2\})$, di certo sarà $m_3 > m_2$ e $a_{m_3} > a_{m_2}$; procedendo così, si costruisce la sottosuccessione cercata. □

È anche utile notare che, per una successione monotona, cercare il limite equivale a cercare quello di *una qualsiasi* sua sottosuccessione:

Proposizione 2.2.8. *Una successione monotona ha limite* ℓ *se e solo se esiste una sua sottosuccessione che ha limite* ℓ.

[61] In realtà, ciò che conta è che la successione sia definitivamente monotona.

Dimostrazione. Sia a_n una successione monotona (per fissare le idee, diciamo crescente) e sia a_{n_k} una sua sottosuccessione con limite ℓ: dunque, visto che anche a_{n_k} è crescente, sarà $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $\ell = +\infty$. Nel primo caso si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\ell - \varepsilon < a_{n_k} \leq \ell$ per ogni $k \geq k_\varepsilon$: ma, essendo a_n crescente, ciò implica che $\ell - \varepsilon < a_m \leq \ell$ per ogni $m \geq n_{k_\varepsilon}$, ovvero che anche a_n converge a ℓ. Il caso $\ell = +\infty$ si prova similmente. □

L'esponenziale naturale Ora possiamo dare una definizione classica, particolarmente semplice e suggestiva, della funzione *esponenziale naturale*.

Teorema 2.2.9. (Esponenziale naturale) *Dato $x \in \mathbb{R}$, la successione* $e_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ *è definitivamente crescente e limitata, dunque converge ad un certo numero reale* **Esponenziale naturale**

$$\exp(x) := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

La funzione $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ha le seguenti proprietà.*

(1) $\exp(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

(2) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ (in particolare $\exp(0) = 1$).

(3) (Proprietà di omomorfismo) *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *vale* $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

(4) (Disuguaglianza dell'esponenziale naturale) *Per ogni* $x < 1$, $x \neq 0$ *si ha*

$$1 + x < \exp(x) < \frac{1}{1 - x} \tag{2.2}$$

(per $x = 0$ vale l'uguaglianza; e la prima disuguaglianza vale per ogni $x \neq 0$).

(5) (Stretta crescenza) *Se* $x < x'$ *allora* $\exp(x) < \exp(x')$.

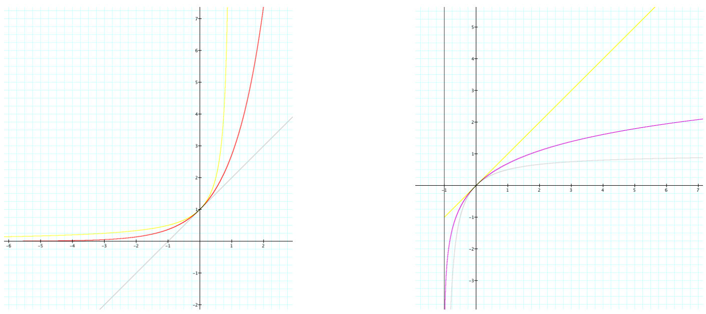


Figura 2.2: Le disuguaglianze fondamentali dell'esponenziale e del logaritmo naturali.

Dimostrazione. Usando la disuguaglianza tra le medie aritmetica e geometrica (vedi pag. 26) con $n+1$ al posto di n e con $a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{x}{n}$ e $a_{n+1} = 1$ (si noti che tutti gli a_i sono > 0 e non tutti uguali se $x \neq 0$) si mostra subito che $e_n(x)$ è crescente per $n > -x$, dunque definitivamente crescente. Quanto alla limitatezza, se $n > |x|$ si ha $0 < 1 - \frac{x^2}{n^2} < 1$, da cui $0 < (1 + \frac{x}{n})(1 - \frac{x}{n}) < 1$, da cui (elevando alla n) si ha $0 < (1 + \frac{x}{n})^n (1 - \frac{x}{n})^n < 1$, ovvero $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n < (1 - \frac{x}{n})^{-n}$; notando che $(1 - \frac{x}{n})^n = (1 + \frac{(-x)}{n})^n$ è crescente se $n > -(-x) = x$ (dunque lo è se $n > |x|$), si ha che la successione al secondo membro $(1 - \frac{x}{n})^{-n}$ è decrescente, e ciò prova che $e_n(x)$ è superiormente limitata (da uno qualsiasi degli elementi della successione di destra con $n > |x|$). Dunque $e_n(x)$, essendo definitivamente crescente e limitata, converge a $\exp(x) := \sup\{(1+\frac{x}{n})^n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ in base alla Proposizione 2.2.6. Passiamo alle proprietà. (1) Se $n > |x|$ vale $0 < (1+\frac{x}{n})^n < \exp(x)$. Dando poi per buona (3) (la proprietà di omomorfismo), (2) ne discende subito (infatti $e_n(0)$ è la costante 1 e dunque $\exp(0) = 1$, e poi $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$, da cui la tesi). Per (4): se $x > -1$ e $x \neq 0$ sappiamo che $(e_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente fin da subito (infatti lo è per $n > -x$, dunque per $n \geq 1$), da cui $e_1(x) = 1 + x < \exp(x)$; la stessa cosa vale ovviamente se $x < -1$ (il primo membro è negativo, il secondo positivo per (1)). Sostituendo x con $-x$ si ottiene allora che $1 - x < \exp(-x)$ per ogni $x \neq 0$; se $x < 1$ il primo membro è positivo, dunque passando ai reciproci e usando (2) si ricava $\exp(x) < \frac{1}{1-x}$, come si voleva. Infine (5): se $t := x' - x > 0$ si ha $\exp(t) > 1 + t > 1$, ovvero $\exp(x' - x) > 1$, ovvero (ricordando (3) e (2)) $\frac{\exp(x')}{\exp(x)} > 1$, da cui subito la tesi. □

In particolare, per $x = 1$ si ha il *numero di Nepero*, che dimostreremo essere irrazionale: **Numero di Nepero**

$$e := \exp(1) = \lim(1 + \tfrac{1}{n})^n = 2,7182818\cdots$$

Poggiando su questa definizione del tutto naturale della funzione $\exp(x)$, si possono ricavare definizioni altrettanto naturali di altre funzioni elementari. Ad esempio, poiché exp è strettamente crescente e si ha $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$,[62] la funzione $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ è una biiezione, la cui inversa (anch'essa strettamente crescente)

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

è detta *logaritmo naturale*. Le proprietà del logaritmo naturale (ovvero $\log(xx') = \log x + \log x'$ e $\log(x^\alpha) = \alpha \log x$) discendono da quelle dell'esponenziale. Da (2.2) si ricava facilmente[63] la *disuguaglianza fondamentale del logaritmo* **Logaritmo naturale**

$$\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \qquad \text{per ogni } x > -1,\ x \neq 0. \tag{2.3}$$

Inoltre, dati $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ si possono definire le funzioni *potenza reale* **Potenza reale**

$$x^\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, \qquad x^\alpha := \exp(\alpha \log x)$$

(da cui, per $x = e$, la notazione alternativa $e^\alpha = \exp(\alpha)$), l'*esponenziale di base a* **Esponenziale di base a**

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \qquad a^x := \exp(x \log a)\,;$$

e, se $a > 0$ e $a \neq 1$, il *logaritmo di base a* **Logaritmo di base a**

$$\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \qquad \log_a x := \frac{1}{\log a} \log x\,.$$

Successioni e topologia Diamo ora alcune utili caratterizzazioni di chiusura, accumulazione e compattezza ottenute con l'uso delle successioni.

[62] Si mostra usando la disuguaglianza (2.2) e la continuità dell'esponenziale, che vedremo più tardi.

[63] Applicando il logaritmo (crescente) ai due membri di $1 + x < \exp(x)$ in (2.2) si ricava $\log(1 + x) < x$, che è la parte destra di (2.3); quanto all'altra metà di (2.3), se in $\exp(\xi) < \frac{1}{1-\xi}$ di (2.2) con $\xi < 1$ e $\xi \neq 0$ si sostituisce $\xi = \frac{x}{1+x}$ (sarà allora $x > -1$ e $x \neq 0$) si ottiene $\exp(\frac{x}{1+x}) < 1 + x$, e basta ancora applicare il logaritmo.

Proposizione 2.2.10. *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.*

(1) *Un punto $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di chiusura per A se e solo se esiste una successione di elementi di A che ha limite x_0.*

(2) *Un punto $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è di accumulazione per A se e solo se esiste una successione di elementi di A* tutti distinti da x_0 *che ha limite x_0.*

(3) *A è compatto*[64] *se e solo se è "sequenzialmente compatto", ovvero ogni successione di elementi di A ammette un sottosuccessione convergente ad un punto di A.*

Dimostrazione. (1) Necessità: supponiamo per iniziare che $x_0 \in \mathbb{R}$. Se x_0 è di chiusura per A si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $B_{x_0}(\frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$, ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ tale che $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$: ma allora la successione (x_n) (fatta di punti di A) converge a x_0. Nel caso ad esempio in cui $x_0 = -\infty$, se x_0 è di chiusura per A si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $]-\infty, n[\cap A \neq \varnothing$, ovvero per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ tale che $x_n < -n$: ma allora la successione (x_n) (fatta di punti di A) converge a $-\infty$. Sufficienza: se esiste una successione (x_n) di elementi di A che converge a x_0, tale successione entra definitivamente in ogni intorno di x_0: perciò per ogni V intorno di x_0 si ha $V \cap A \neq \varnothing$, ovvero x_0 è di chiusura per A. (2) Dimostrazione simile a quella per la chiusura. (3) Necessità: sia A compatto, e sia (x_n) una successione di elementi di A. Poiché A è limitato, tale è anche la successione, e dunque (Proposizione 2.2.7) essa ammette una sottosuccessione convergente, diciamo a $x_0 \in \mathbb{R}$: essendo però A anche chiuso, per (1) si avrà $x_0 \in A$. Dunque A è sequenzialmente compatto. Sufficienza: sia A sequenzialmente compatto. Se A non fosse chiuso, esisterebbe qualche punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di chiusura per A e che non sta in A, e per (1) esisterebbe una successione (x_n) di elementi di A che converge a x_0; se A non fosse limitato, esisterebbe una successione x'_n di elementi di A che diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Ma allora (Proposizione 2.2.3) nessuna delle sottosuccessioni di (x_n) e di (x'_n) potrebbe convergere a un elemento di A, e ciò negherebbe la compattezza sequenziale di A. Dunque A è sia chiuso che limitato, ovvero compatto. $\square$

$\boxed{\textbf{Sul calcolo dei limiti di successioni in forma indeterminata}}$ Vediamo ora alcune tecniche che aiutano a semplificare il calcolo dei limiti di successioni. Ad esempio, il seguente criterio è spesso utile.

Proposizione 2.2.11. (Criterio del rapporto per le successioni) *Sia $a_n > 0$ tale che $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ esista (in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ oppure $+\infty$). Se $0 \leq l < 1$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima; se $l > 1$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$; se invece $l = 1$ non si sa dire nulla in generale.*

Dimostrazione. Se $0 \leq l < 1$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diventa decrescente da un certo N in poi; essendo inferiormente limitata (da 0) essa ammette limite $a = \lim a_n = \inf_{n\geq N} a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, e passando al limite nell'identità $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n$ si ottiene $a = la$, da cui $a = 0$. Similmente, se $l > 1$ la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diventa crescente da un certo N in poi, e dunque essa ammette limite $a = \lim a_n = \sup_{n\geq N} a_n \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{+\infty\}$, e passando al limite nell'identità $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} a_n$ si ottiene $a = la$, da cui stavolta $a = +\infty$. Tali ragionamenti non si applicano se $l = 1$, caso in cui non si sa dire nulla in generale: ad esempio, per $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{n}{n+1}$ e $c_n = n$ si ha sempre $l = 1$, ma la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende a 1 mentre $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$. $\square$

Esempi. **(1)** Fissato un $\alpha \in \mathbb{R}$, la *successione geometrica* di ragione α è data da $a_n = \alpha^n$ (ovvero, $a_1 = \alpha$, $a_2 = \alpha^2$, ...). Se $\alpha = 0$ essa è ovviamente la successione costante nulla; se $|\alpha| < 1$ essa è infinitesima e se $|\alpha| > 1$ essa diverge a ∞ (infatti $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |\alpha|$). Infine, se $\alpha = 1$ si ha la successione costante 1, mentre se $\alpha = -1$ si ha la successione alternante $(-1)^n$, che è indeterminata. **(2)** Per ogni $\alpha > 1$ ed ogni $q \in \mathbb{N}$ vale $\lim \frac{\alpha^n}{n^q} = +\infty$: infatti, posto $a_n = \frac{\alpha^n}{n^q}$ si ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^q = \alpha > 1$. **(3)** Per ogni $\alpha > 0$

[64] cioè, lo ricordiamo, chiuso e limitato.

vale $\lim \frac{\alpha^n}{n!} = 0$: infatti, posto $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$ si ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\alpha}{n+1} = 0$. **(4)** Vale $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$: infatti, posto $a_n = \frac{n!}{n^n}$ si ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim(\frac{n}{n+1})^n = \lim((1+\frac{1}{n})^n)^{-1} = \frac{1}{e} < 1$.

Come detto in precedenza, il calcolo di limiti è agevolato se già ora si usa la continuità di alcune funzioni elementari (potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometriche, e loro somme, prodotti e quozienti) che proveremo più avanti. In generale, usare la continuità di una funzione $f(x)$ di variabile reale x significa che se $b_n \to \ell \in \mathbb{R}$ allora $f(b_n) \to f(\ell) \in \mathbb{R}$ (ove "$f(\ell)$" è inteso anche nel senso di "limite di $f(x)$ quando x tende a ℓ": dunque ad esempio se $b_n \to -\infty$ allora $\exp(b_n) \to 0^+$; se $b_n \to 0^+$ allora $\log(b_n) \to -\infty$; se $b_n \to +\infty$ allora $\exp(b_n)$, $\log(b_n) \to +\infty$).

Esempi. **(1)** La successione $a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}}$ tende a 1: infatti $\frac{1}{n}$ è infinitesima, e poi si usa la continuità dell'esponenziale $f(x) = 2^x$ per concludere che allora a_n tende a $2^0 = 1$. (Altro modo per dimostrare questo limite: usando la continuità dell'esponenziale e del logaritmo si ha che $a_n = \sqrt[n]{2}$ tende a 1 se e solo se $\log a_n$ tende a $\log 1 = 0$: ma quest'ultima cosa è chiara, perché $\log a_n = (\log 2)\frac{1}{n}$ (la successione infinitesima moltiplicata per la costante $\log 2$). **(2)** La successione $a_n = \log \sin \frac{1}{n^2}$ tende a $-\infty$: infatti $\frac{1}{n^2}$ è infinitesima, dunque (continuità del seno) $\sin \frac{1}{n^2} \to 0^+$, dunque (continuità del logaritmo) $a_n \to -\infty$. **(3)** La successione $a_n = \log(n^2+1) - 2\log n$ è della forma $+\infty - \infty$; usando la proprietà del logaritmo essa diventa $a_n = \log \frac{n^2+1}{2n^2}$, e poiché $\frac{n^2+1}{2n^2} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2}$ tende a $\frac{1}{2}$, usando la continuità di log si ricava che allora a_n tende a $\log \frac{1}{2} = -\log 2$. **(4)** La successione $a_n = \exp(n^3 - 6n)$ tende a $+\infty$: infatti $n^3 - 6n \to +\infty$, dunque (continuità dell'esponenziale) $a_n \to +\infty$.

È utile anche il seguente risultato:

Proposizione 2.2.12. (Cesaro) *Date u_n e v_n con $v_n > 0$ e $\lim(v_1 + \cdots + v_n) = +\infty$, se esiste $\lim \frac{u_n}{v_n}$ allora esiste anche $\lim \frac{u_1+\cdots+u_n}{v_1+\cdots+v_n}$ ed è uguale a esso. Ad esempio:*

(i) *Se esiste $\lim a_n$, allora esiste anche $\lim \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ ed è uguale a esso.*

(ii) *Se esiste $\lim(b_n - b_{n-1})$, allora esiste anche $\lim \frac{b_n}{n}$ ed è uguale a esso.*

(iii) *Se $c_n \geq 0$ e esiste $\lim c_n$, allora esiste anche $\lim \sqrt[n]{c_1 \cdots c_n}$ ed è uguale a esso.*

(iv) *Se $d_n > 0$ e esiste $\lim \frac{d_{n+1}}{d_n}$, allora esiste anche $\lim \sqrt[n]{d_n}$ ed è uguale a esso.*

Dimostrazione. Non diamo la dimostrazione dell'enunciato principale; notiamo che (i) ne segue ponendo $u_n = a_n$ e $v_n = 1$, mentre (ii) segue da (i) con $a_1 = b_1$ e $a_n = b_n - b_{n-1}$ per $n \geq 2$, e (iii) e (iv) seguono da (i) e (ii) con $a_n = \log c_n$ e $b_n = \log d_n$ usando la continuità del logaritmo. □

Esercizio. *Mostrare i seguenti limiti:* **(a)** $\lim \sqrt[n]{n} = 1$; **(b)** $\lim \frac{\log n}{n} = 0$; **(c)** $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$; **(d)** $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$; **(e)** $\lim \frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ (ove $k \in \mathbb{N}$).

Risoluzione. **(a-b)** La Proposizione 2.2.12 con $d_n = n$ dice subito che $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, e $\lim \frac{\log n}{n} = 0$ ne segue dalla continuità del logaritmo. Proponiamo tuttavia altre due risoluzioni. (i) Per mostrare che $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ ci basta mostrare che, preso un qualsiasi $\varepsilon > 0$, si ha definitivamente $1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$, ovvero (elevando alla n) che $1 \leq n < (1+\varepsilon)^n$. La prima disuguaglianza è ovvia, e la seconda, essendo $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}(n^2-n) =: b_n$ basta mostrare che $n < b_n$ definitivamente, è anch'essa vera (infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{b_n} = 0$). Applicando log e sfruttandone la continuità, ne discende anche $\lim \frac{\log n}{n} = 0$. (ii) Iniziamo mostrando che $\sqrt[n]{n}$ è definitivamente decrescente, ovvero che $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$:

infatti ciò equivale a $n^{n+1} > (n+1)^n$, ovvero $n/(1+\frac{1}{n})^n > 1$, e ciò è vero per $n \geq 3$ (infatti $(1+\frac{1}{n})^n$ tende crescendo a $e < 3$). Dunque $\sqrt[n]{n}$ è definitivamente decrescente, ma allora tale è anche $\frac{\log n}{n}$ (ottenuta applicando log, crescente): pertanto, se vogliamo mostrare che $\lim \frac{\log n}{n} = 0$ ci basta farlo su una sua qualsiasi sottosuccessione (Proposizione 2.2.8). Ad esempio consideriamo quella data da $\nu(k) = 2^k$, ovvero $\frac{\log 2^k}{2^k} = (\log 2)\frac{k}{2^k}$: poiché $\lim \frac{(\log 2)\,(k+1)/2^{k+1}}{(\log 2)\,k/2^k} = \frac{1}{2} < 1$, si ha $\lim(\log 2)\frac{k}{2^k} = 0$, dunque anche $\lim \frac{\log n}{n} = 0$, dunque (applicando exp, continuo) anche $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. **(c)** Anche in questo caso la Proposizione 2.2.12 permette di concludere subito con $d_n = n!$; alternativamente si può ragionare come segue. Se n è pari si ha $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{n(n-1)\cdots\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)\cdots 1} \geq \sqrt[n]{\frac{n}{2}\frac{n}{2}\cdots\frac{n}{2}\cdot 1\cdots 1} = \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$, e se n è dispari si ha $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{n(n-1)\cdots\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdots 1} \geq \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}\frac{n+1}{2}\cdots\frac{n+1}{2}\cdot 1\cdots 1} = \sqrt[n]{(\frac{n+1}{2})^{\frac{n+1}{2}}} > \sqrt[n]{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$, dunque $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$ (per il "carabiniere unico"). **(d)** Proposizione 2.2.12 con $d_n = \frac{n!}{n^n}$. **(e)** Proposizione 2.2.12 con $u_n = n^k$, $v_1 = 1$ e $v_n = n^{k+1} - (n-1)^{k+1}$, ricordando il binomio di Newton.

Tuttavia, sarà dopo lo studio dei limiti di funzioni di una variabile reale che potremo allargare considerevolmente la nostra capacità di calcolo di limiti di successioni, perché quest'ultimo verrà ricompreso come caso particolare del primo.[65]

Esempio. (1) Vedremo che $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$: ne deriverà che, ad esempio, anche le successioni $n^2(1-\cos\frac{1}{n})$ e $e^{2n}(1-\cos e^{-n})$ (casi particolari del limite precedente, in cui anziché tendere a 0 lungo lungo tutta la variabile reale x vi si tende lungo le particolari successioni infinitesime $x'_n = \frac{1}{n}$ e $x''_n = e^{-n}$) tendono a $\frac{1}{2}$. **(2)** Per mostrare che $\lim n\log(1+\frac{1}{n}) = 1$ basta ricordare la disuguaglianza fondamentale del logaritmo per $x = \frac{1}{n}$, ovvero $\frac{1/n}{1+(1/n)} < \log(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$: moltiplicando per n si ottiene $\frac{n}{n+1} < n\log(1+\frac{1}{n}) < 1$, e il limite segue per i due carabinieri. Per mostrare $\lim n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$ si procede analogamente usando la disuguaglianza fondamentale dell'esponenziale. Ma anche questi due limiti discenderanno subito come conseguenza dei limiti in variabile reale $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

---

[65] In effetti, aver introdotto il limite per la variabile naturale (ovvero per le successioni) anziché fin da subito per la variabile reale ha una valenza soprattutto educativa. La nozione di limite è più comprensibile e ricca di sfumature se introdotta prima per le successioni e solo poi ampliata alle funzioni di variabile reale: va notato infatti che l'uso delle successioni, come vedremo, fornisce esso stesso una definizione alternativa di limite per le funzioni di variabile reale.