

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Autoverifica su topologia di $\mathbb{R}$ e successioni reali

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

mercoledì 22 ottobre 2014

Istruzioni generali. (1) Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito lunedì 27/10). (2) Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 36 pt (4×9 pt). **Ex. 2:** 18 pt (2×9 pt). **Ex. 3:** 36 pt (6×6 pt). **Ex. 4:** 10 pt. **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sé quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

1. Descrivere ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (eventualmente dipendente da $\alpha \in \mathbb{R}$), dire se è superiormente/inferiormente limitato e determinarne sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; dire se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; in quali sovrainsiemi è denso⁽¹⁾; di quali punti di $\tilde{\mathbb{R}}$ è intorno; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera.

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}] \cup \mathbb{Q}_{\leq e}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \cos 2x \geq \alpha\} \cap \mathbb{R}_{<1};$$

$$C = \{\log(x^2 - x + 1) : -1 < x \leq 3\} \cup \{(-1)^n \frac{1-3n}{n} : n \in \mathbb{N}\}; \quad D = \{\frac{2}{3} + (1 - \frac{1}{2n})^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. (a) Dimostrare che un sottoinsieme di $A \subset \mathbb{R}$ è aperto (in $\mathbb{R}$) se e solo se è intorno di ogni suo punto, e che è chiuso (in $\mathbb{R}$) se e solo se contiene tutti i suoi punti di chiusura (in $\mathbb{R}$).
(b) Dato $A \subset \mathbb{R}$, l'interno A° è l'insieme dei suoi punti interni e la chiusura $\bar{A}$ (in $\mathbb{R}$) l'insieme dei suoi punti di chiusura in $\mathbb{R}$. Dimostrare che A° è l'unione di tutti gli aperti di $\mathbb{R}$ contenuti in A (dunque è il più grande aperto di $\mathbb{R}$ contenuto in A), mentre $\bar{A}$ è l'intersezione di tutti i chiusi di $\mathbb{R}$ contenenti A (dunque è il più piccolo chiuso di $\mathbb{R}$ contenente A).

3. Calcolare (se esistono) i seguenti limiti di successioni (a_n) , eventualmente al variare dei parametri (si intende che $x, y > 0$; $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$; $\alpha \in \mathbb{R}$).⁽²⁾

$$(a) \sqrt[n]{x^n + y^n}; \quad (b) \sin(\frac{n\pi}{3}); \quad (c) \frac{8n-7n^n}{3n!+a^n}; \quad (d) \log_a(\frac{3n^\alpha+2}{n^2+1}); \quad (e) \frac{n(3+2\sin n)}{4+\cos 2n}; \quad (f) (1 + \frac{2}{n^2})^n.$$

4. Dimostrare che se a_n è crescente, b_n decrescente, $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $b_n - a_n \rightarrow 0$, allora a_n e b_n convergono allo stesso limite in $\mathbb{R}$. Mostrare poi che $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$ e $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$ soddisfano queste ipotesi⁽³⁾ (il loro limite $\gamma = 0,67\dots$ è detto *costante di Eulero-Mascheroni*).

⁽¹⁾ Si ricorda che se $A, B \subset \mathbb{R}$ con $A \subset B$, A è *denso* in B se ogni punto di B è di chiusura per A , ovvero se $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$.

⁽²⁾ Per (f), sapendo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{m \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{m})^m = \exp(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ si ha che...

⁽³⁾ Si userà la *disuguaglianza fondamentale del logaritmo* $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$, valida per ogni $x > -1$, $x \neq 0$.

Soluzioni.

1. Per ragioni di brevità non giustifichiamo tutte le risposte date (ma lo studente dovrebbe). Per maggiori dettagli si fa riferimento alle note delle lezioni.

$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}] \cup \mathbb{Q}_{\leq e}$ Si tratta dell'unione degli intervalli semiaperti $]0, 2]$, $]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ (si sovrappone parzialmente al precedente), $]\frac{8}{3}, \frac{10}{3}]$, $]\frac{15}{4}, \frac{17}{4}]$, ... con i razionali $\leq e$ (ove "e" indica il numero di Nepero, irrazionale). Dunque A è illimitato sia superiormente che inferiormente, perciò non ammette sup/inf/max/min in $\mathbb{R}$ ma solo $\sup_{\mathbb{R}} A = +\infty$ e $\inf_{\mathbb{R}} A = -\infty$. Esso non è né aperto (non è intorno del suo punto -1) né chiuso (il punto $-\pi$ è di accumulazione ma non appartiene ad A), non compatto, non discreto; poiché la chiusura (cioè, l'insieme dei punti di chiusura) di A in $\mathbb{R}$ è $\bar{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}] \cup \mathbb{Q}_{\leq e} \cup \{\mp\infty\}$, A è denso in ogni sovrainsieme B che sia contenuto in $\bar{A}$. I punti di $\mathbb{R}$ di cui A è intorno sono tutti e soli quelli di $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}]$; i punti interni sono gli stessi ("punti di cui è intorno" e "punti interni" vuol dire la stessa cosa); i punti di aderenza (ovvero di chiusura) in $\mathbb{R}$ sono quelli di $\bar{A}$, detti poco fa; punti isolati non ve ne sono, dunque quelli di chiusura sono anche di accumulazione in $\mathbb{R}$. Infine, i punti di frontiera sono quelli di $[-\infty, 0] \cup [\frac{5}{2}, \frac{8}{3}] \cup \{\frac{10}{3}, \frac{15}{4}, \frac{17}{4}, \dots\} \cup \{+\infty\}$.

$B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \cos 2x \geq \alpha\} \cap \mathbb{R}_{<1}$ La disequazione $3 \cos 2x \geq \alpha$, ovvero $\cos 2x \geq \frac{\alpha}{3}$, non ha soluzioni se $\alpha > 3$: dunque in tali casi si ha $B = \emptyset$. Se invece $\alpha < -3$ essa è sempre vera, dunque $B = \mathbb{R}_{<1}$ (limitato solo superiormente; sup è 1, inf (in $\mathbb{R}$) è $-\infty$; aperto, non chiuso, non compatto, non discreto, denso nei sovrainsiemi contenuti in $[-\infty, 1]$; intorno di ogni suo punto (volendo, anche di $-\infty$), tutti i suoi punti sono interni, punti di chiusura tutti e soli i suoi quelli di $[-\infty, 1]$, che sono anche di accumulazione in quanto non vi sono punti isolati; i punti di frontiera sono $-\infty$ e 1). Vi sono poi due casi estremali con $\alpha = \mp 3$. Se $\alpha = 3$ si ottiene $\cos 2x = 1$ e dunque $2x = 2k\pi$ ovvero $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$: pertanto in questo caso $B = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\} = \{\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0\}$ (limitato solo superiormente; massimo e sup è 0, inf in $\mathbb{R}$ è $-\infty$; non aperto, chiuso (in $\mathbb{R}$, non in $\mathbb{R}$), non compatto, discreto, denso solo in se stesso e in $B \cup \{-\infty\}$; nessun punto interno, punti di chiusura tutti e soli i suoi (in $\mathbb{R}$ c'è anche $-\infty$), unico punto di accumulazione è $-\infty$, tutti punti isolati, e i punti di frontiera sono tutti e soli i suoi e $-\infty$). Se invece $\alpha = -3$ si ottiene $\cos 2x = -1$ e dunque $2x = \pi + 2k\pi$ ovvero $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$: pertanto in questo caso $B = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}_{\leq -1}\} = \{\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$, e si ottengono conclusioni simili alle precedenti. Infine, se $|\alpha| < 3$ la disequazione $\cos 2x \geq \frac{\alpha}{3}$ ha soluzioni $-\arccos \frac{\alpha}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \arccos \frac{\alpha}{3} + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $-\frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} + k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta poi di intersecare questa unione disgiunta di intervalli chiusi con la semiretta $\mathbb{R}_{\leq 1}$: a tal fine, poiché il solo estremo che può cadere nei paraggi di 1 è $\frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3}$, notiamo che $\frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} \leq 1$ se e solo se $\alpha \geq 3 \cos 2 \sim -1,25$. Dunque se $-3 < \alpha < 3 \cos 2$ si ha $B = \bigcup_{k \leq -1} [-\frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} + k\pi, \frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} + k\pi] \cup [-\frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3}, 1]$, unione disgiunta di intervalli compatti di $\mathbb{R}$: si ha $\max B = 1$, $\inf B = -\infty$, chiuso in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{R}$ (va aggiunto $-\infty$) e denso in se stesso (e in $B \cup \{-\infty\}$), intorno di tutti i suoi punti diversi dagli estremi degli intervalli, punti di chiusura (e di accumulazione, visto che nessuno è isolato) sono tutti quelli di $B \cup \{-\infty\}$, punti di frontiera sono gli estremi $\mp \frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} + k\pi$ (con $k \leq -1$), 1 e $-\infty$. Se invece $3 \cos 2 < \alpha < 3$ si ha $B = \bigcup_{k \leq 0} [-\frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} + k\pi, \frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3} + k\pi]$, e le descrizioni sono le stesse del caso precedente, tranne che $\max B = \frac{1}{2} \arccos \frac{\alpha}{3}$.

$C = \{\log(x^2 - x + 1) : -1 < x \leq 3\} \cup \{(-1)^n \frac{1-3n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ Siano C_1 e C_2 i due insiemi di qui sopra che, uniti, danno C . L'insieme C_1 è l'immagine dell'intervallo $] -1, 3]$ tramite $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = \log(x^2 - x + 1)$. La fibra sopra $y \in \mathbb{R}$ è $f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R} : \log(x^2 - x + 1) = y\}$, dunque si ottiene $x^2 - x + 1 - e^y = 0$, da cui $x = \frac{1 \pm \sqrt{4e^y - 3}}{2}$ (che esistono se $4e^y - 3 \geq 0$, ovvero se $y \geq y_0 := \log \frac{3}{4} = -(2 \log 2 - \log 3) < 0$): pertanto $f^{-1}(y) = \emptyset$ per $y < y_0$, $f^{-1}(y_0) = \{\frac{1}{2}\}$ e $f^{-1}(y) = \{\frac{1 - \sqrt{4e^y - 3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{4e^y - 3}}{2}\}$ per $y > y_0$. Così, imponendo (nell'ipotesi $y \geq y_0$) che $-1 < \frac{1 - \sqrt{4e^y - 3}}{2} \leq 3$ oppure $-1 < \frac{1 + \sqrt{4e^y - 3}}{2} \leq 3$ si ottiene l'intervallo $C_1 = [y_0, \log 7]$. Quanto a C_2 , esso è formato dai punti di una successione priva di limite: infatti la sottosuccessione pari $a_{2n} = \{\frac{1-6n}{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \{-\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}, -\frac{17}{6}, \dots\}$ converge decrescendo a -3 , mentre la sottosuccessione dispari $a_{2n-1} = \{\frac{6n-4}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} = \{2, \frac{8}{3}, \frac{14}{5}, \dots\}$ converge crescendo a 3. C si ottiene dunque unendo l'intervallo compatto $C_1 = [y_0, \log 7]$ con tutti questi punti: notando che $y_0 \sim -0,3$ e $\log 7 \sim 1,95$, si tratta di un'unione disgiunta (cioè $C = C_1 \sqcup C_2$). Pertanto C è limitato con $\sup = 3$ e $\inf = -3$, ma senza max e min; non è aperto (infatti non è intorno di nessuno dei punti discreti di C_2) né chiuso (infatti 3 è di accumulazione per C ma non vi sta), non è compatto né discreto; poiché la sua chiusura è $\bar{C} = C \cup \{\mp 3\}$, C è denso in un sovrainsieme se e solo se quest'ultimo è C con in più nessuno, uno o entrambi ± 3 . C è intorno dei punti di $[y_0, \log 7]$; i punti di aderenza sono, come detto, quelli di $C \cup \{\mp 3\}$, tra i quali quelli di accumulazione sono quelli di $[y_0, \log 7] \cup \{\mp 3\}$, tutti gli altri punti di C (ovvero quelli di C_2) sono isolati, mentre i punti di frontiera sono quelli dell'insieme $\{-3, y_0, \log 7, 3\} \cup C_2$.

$D = \{\frac{2}{3} + (1 - \frac{1}{2^n})^n : n \in \mathbb{N}\}$ La successione esponenziale $(1 - \frac{1}{2^n})^n = (1 + \frac{(-1/2)}{n})^n = e_n(-\frac{1}{2})$ è crescente

(infatti sappiamo che è definitivamente crescente a partire da $n > |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, dunque lo è fin da subito per $n \geq 1$) e converge a $\exp(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, dunque gli elementi dell'insieme D sono una famiglia discreta di punti che converge, crescendo con n , a $\ell := \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{e}} \sim 1,27$. Pertanto D è limitato con $\sup = \ell$ (ma non è max) e $\inf = \min = \frac{2}{3} + (1 - \frac{1}{2})^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$; non è aperto (non è intorno dei suoi punti) ne' chiuso (infatti ℓ è di accumulazione per D ma non vi sta), non compatto, discreto; la sua chiusura è $\overline{D} = D \cup \{\ell\}$, dunque D è denso in se stesso o in $D \cup \{\ell\}$. Non ha punti interni; i punti di aderenza sono, come detto, quelli di $D \cup \{\ell\}$, tra i quali l'unico di accumulazione è ℓ mentre tutti gli altri sono isolati; i punti di frontiera sono tutti e soli quelli di $D \cup \{\ell\}$.

2. Quelle proposte sono due delle possibili risoluzioni di (a) e (b). Altre risoluzioni (ad esempio usando le caratterizzazioni di chiusura e accumulazione tramite le successioni) sono possibili: lo studente valuti se le sue siano altrettanto valide delle nostre, o in che misura contengano difetti o lacune rispetto a queste.

(a) A è aperto (cioè è unione di intervalli aperti) se e solo se contiene una palla aperta centrata in ogni suo punto (vedi le note delle lezioni), dunque —poiché le palle aperte centrate in un punto costituiscono una base di intorni del punto stesso in $\mathbb{R}$ — se e solo se è intorno di ogni suo punto. • Sia A chiuso in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ di chiusura per A . Se per assurdo $x_0 \notin A$ allora $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$, che è aperto e dunque è lui stesso un intorno di x_0 per quanto appena detto: ma ciò è in contraddizione col fatto che x_0 è di chiusura per A (in ogni intorno di x_0 vi devono essere punti di A). Viceversa, supponiamo che A non sia chiuso: allora $\mathbb{R} \setminus A$ non è aperto, dunque esiste $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$ di cui $\mathbb{R} \setminus A$ non è intorno, ma ciò implica che x_0 è di chiusura anche per A (ovvero è di frontiera), e dunque A non contiene tutti i suoi punti di chiusura.

(b) Mostriamo che $A^\circ = B := \bigcup \{U \subset \mathbb{R} : U \text{ è aperto, } U \subset A\}$. Se $x_0 \in A$ è punto interno di A esiste $r > 0$ tale che $B_{x_0}(r) \subset A$: ma $U = B_{x_0}(r)$ è per l'appunto un aperto di $\mathbb{R}$ contenuto in A , dunque x_0 sta nell'unione B al secondo membro. Ciò mostra che $A^\circ \subset B$. Viceversa, sia U un qualsiasi aperto di $\mathbb{R}$ contenuto in A , e sia $x_0 \in U$: allora esiste $r > 0$ tale che $B_{x_0}(r) \subset U \subset A$, dunque x_0 è punto interno di A , dunque sta in A° . Ciò mostra che $A^\circ \supset B$, dunque che $A^\circ = B$. • Mostriamo che $\overline{A} = C := \bigcap \{L \subset \mathbb{R} : L \text{ è chiuso, } L \supset A\}$. Se x_0 è di chiusura per A e L è un qualsiasi chiuso di $\mathbb{R}$ contenente A , necessariamente x_0 è di chiusura anche per L , dunque appartiene a L per quanto detto in (a). Ciò mostra che $\overline{A} \subset C$. Viceversa, se $x_0 \in \mathbb{R}$ non è di chiusura per A esiste un intorno (che possiamo supporre aperto) U di x_0 tale che $U \cap A = \emptyset$, ovvero tale che $A \subset \mathbb{R} \setminus U$. Ma allora $L = \mathbb{R} \setminus U$ è un chiuso di $\mathbb{R}$ contenente A , e di certo $x_0 \notin L$: pertanto $x_0 \notin C$. Ciò mostra che $\overline{A} \supset C$, e dunque che $\overline{A} = C$.

3. Chiameremo a_n il termine generale di ciascuna delle successioni, e daremo per noto (perché mostrato a lezione o sulle note) che $\lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$ per ogni $\alpha > 0$, che q^n è infinitesima se $|q| < 1$ e diverge a ∞ se $|q| > 1$, e che $\lim \frac{n!}{n^n} = \lim \frac{\alpha^n}{n!} = \lim \frac{n^\beta}{\alpha^n} = 0$ per ogni $\alpha > 1$ e ogni $\beta > 0$.

$\sqrt[n]{x^n + y^n}$ Se $x > y$ scriviamo $a_n = x \sqrt[n]{1 + (\frac{y}{x})^n}$: la successione geometrica q^n con $0 < q = \frac{y}{x} < 1$ è infinitesima, dunque si ha definitivamente $1 < 1 + (\frac{y}{x})^n < 2$, da cui definitivamente $1 < \sqrt[n]{1 + (\frac{y}{x})^n} < \sqrt[n]{2}$: ricordando che $\lim \sqrt[n]{2} = 1$, per i due carabinieri si conclude che $\sqrt[n]{1 + (\frac{y}{x})^n}$ tende a 1, dunque $\lim a_n = x$. Se $x = y$ si ha $a_n = x \sqrt[n]{2}$, da cui ancora $\lim a_n = x$. Infine, se $x < y$ si ricava similmente $\lim a_n = y$. Ricapitolando, $\lim a_n = \max\{x, y\}$.

$\sin(\frac{n\pi}{3})$ La sottosuccessione $a_{6n} = \sin(\frac{6n\pi}{3}) = \sin(2n\pi)$ è identicamente nulla (in particolare ha limite 0), mentre la sottosuccessione $a_{6n+1} = \sin(\frac{(6n+1)\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3} + 2n\pi)$ è la costante $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (in particolare ha limite $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Dunque a_n è indeterminata.

$\frac{8n-7n^n}{3n!+a^n}$ Si ha $a_n = (\frac{n}{n!})^{\frac{8(n/n^n)-7}{3+(a^n/n!)}}$, e ricordando che $\lim \lim \frac{n!}{n^n} = \lim \frac{a^n}{n!} = \lim \frac{n^\beta}{n^n} = 0$ si ottiene $\lim a_n = -\infty$ (indipendentemente da a).

$\log_a(\frac{3n^\alpha+2}{n^2+1})$ Occupiamoci dell'argomento $u_n := \frac{3n^\alpha+2}{n^2+1}$. Il denominatore tende a $+\infty$; se $\alpha < 0$ il numeratore tende a 2 e dunque u_n tende a 0^+ ; se $\alpha = 0$ il numeratore tende a 5 e dunque ancora u_n tende a 0^+ ; se $0 < \alpha < 2$ il numeratore tende a $+\infty$, ma raccogliendo n^α sopra e n^2 sotto si capisce che ancora u_n tende a 0^+ ; se $\alpha = 2$ stavolta u_n tende a 3; infine, se $\alpha > 2$ allora u_n tende a $+\infty$. Sfruttando la continuità del logaritmo, concludiamo che se $\alpha < 2$ allora $\lim a_n = -\infty$ se $a > 1$ e $\lim a_n = +\infty$ se $0 < a < 1$; se $\alpha = 2$ allora $\lim a_n = \log_a 3$; infine, se $\alpha > 2$ allora $\lim a_n = +\infty$ se $a > 1$ e $\lim a_n = -\infty$ se $0 < a < 1$.

$\frac{n(3+2\sin n)}{4+\cos 2n}$ Si ha $a_n > \frac{1}{5}n$, dunque $\lim a_n = +\infty$ (per il “carabiniere unico”).

$(1 + \frac{2}{n^2})^n$ Si ha $a_n = \sqrt[n]{(1 + \frac{2}{n^2})^{n^2}}$: la successione $(1 + \frac{2}{n^2})^{n^2}$ è una sottosuccessione della successione esponenziale $e_n(2) = (1 + \frac{2}{n})^n$ che converge (crescendo) a e^2 , dunque anch'essa convergerà a $e^2 \sim 7,4$, in particolare starà definitivamente tra 7 e 8: pertanto $\sqrt[n]{7} \leq a_n \leq \sqrt[n]{8}$, dunque $\lim a_n = 1$ per i due carabinieri.

4. Nelle ipotesi di cui sopra si ha $a_n \leq b_m$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$: infatti, se $m \leq n$, per la decrescenza di b si ha $a_n \leq b_n \leq b_m$, mentre se $n \leq m$ per la crescita di a si ha $a_n \leq a_m \leq b_m$. Perciò a_n è crescente e superiormente limitata, dunque converge a $\ell_1 = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$; analogamente b_n è decrescente e inferiormente limitata, dunque converge a $\ell_2 = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$; e per il confronto si ha $\ell_1 \leq \ell_2$. Se per assurdo fosse $\ell_1 < \ell_2$ si avrebbe $b_n - a_n > \ell_2 - \ell_1 > 0$, il che contraddirebbe che $\lim(b_n - a_n) = 0$. Perciò $\ell_1 = \ell_2$, come si voleva.
- La successione $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$ è crescente, perché $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n+1} - \log(1 + \frac{1}{n+1}) > 0$ grazie alla disuguaglianza fondamentale del logaritmo (con $x = \frac{1}{n+1}$); per lo stesso motivo (con $x = \frac{1}{n}$) si ha $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log \frac{n+1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} - \log(1 + \frac{1}{n}) < 0$, dunque b_n è decrescente. Si ha poi $b_n - a_n = -\log n + \log(n+1) = \log(1 + \frac{1}{n}) > 0$, e $b_n - a_n$ tende a 0 grazie alla continuità del logaritmo.