ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di lunedì 27/10/2014

GENERALITÀ SULLE FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

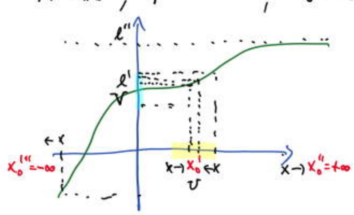
- Operazioni e ordine $\overset{\subseteq\mathbb{R}}{A} \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \mathbb{R}$ $\quad f+g,\ fg \ ;\ f \le g$
- Dominio naturale $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}}{x-2}$ $\quad \begin{cases} x+1\ge 0\\ x-2\ne 0\end{cases}$ $\quad f: A_f\to\mathbb{R}$, $A_f=[-1,+\infty[\setminus\{2\}$.
- Grafico
- Immagini e controimmagini
- Parità
- Periodicità
- Crescenza, max/min
- Limitatezza
- Composizioni con riflessioni, traslazioni, omotetie

$$f(x) \rightsquigarrow \begin{matrix} f(x)+k & f(kx) & f(-x) \\ f(x+k) & -f(x) & \ldots \end{matrix}$$

Tutti questi concetti vengono riassunti nelle pagine iniziali delle note sull'argomento, che lo studente è invitato a leggere per conto suo.

LIMITE di una funz. reale di var. reale

$A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$, $x_0\in\tilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A



- $\lim_{x\to x_0'} f(x)=\ell'$
- $\lim_{x\to x_0''} f(x)=\ell''$
- $\lim_{x\to x_0'''} f(x)=-\infty$

(Per le successioni era $A=\mathbb{N}$, e l'unico punto di accumulazione in $\tilde{\mathbb{R}}$ per $\mathbb{N}$ è $x_0=+\infty$: dunque stiamo generalizzando il concetto di limite visto per le successioni.)

Considerare il limite di f quando la variabile tende a x_0 significa chiedersi se la funzione f ha una "tendenza naturale" quando la variabile x tende in tutti i modi possibili a x_0 (ma senza raggiungerlo)

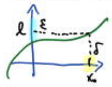
Diremo che, dato $\ell\in\tilde{\mathbb{R}}$, si ha

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \overset{def}{:=} \quad \begin{array}{l} \forall V \text{ intorno di } \ell \\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c.} \\ f((U\cap A)\setminus\{x_0\}) \subseteq V \end{array}}$$

Prima osservazione importante: la definizione può essere limitata ai soli intorni di una base, sia per x_0 che per l

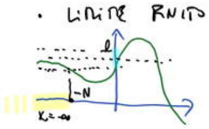
Ciò detto, possiamo concretizzare la mia definizione generale nei quattro casi particolari che seguono:

- LIMITE FINITO PER TENDENZA FINITA



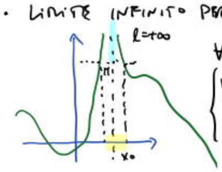
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.
$\begin{cases} \forall x : x \in A, \\ |x - x_0| < \delta, \\ x \neq x_0 \end{cases} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

- LIMITE FINITO PER TENDENZA INFINITA



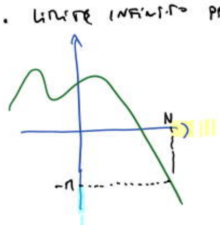
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0$ t.c.
$\begin{cases} \forall x : x \in A \\ x < -N \end{cases} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

- LIMITE INFINITO PER TENDENZA FINITA



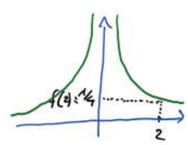
$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c.
$\begin{cases} \forall x : x \in A \\ |x - x_0| < \delta \\ x \neq x_0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > M$

- LIMITE INFINITO PER TENDENZA INFINITA



$\forall M > 0 \ \exists N > 0$ t.c.
$\begin{cases} \forall x : x \in A \\ x > N \end{cases} \Rightarrow f(x) < -M$

$\boxed{\text{Es}}$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad f : A \to \mathbb{R} \quad A = \mathbb{R}_x \quad ; \quad x_0 = -\infty, 0, 2, +\infty$



- Verifichiamo che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$

Tesi: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : x < -N \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$, ovvero (qui) $(0 \leq) f(x) < \varepsilon$.

Sia dunque $\varepsilon > 0$, e vediamo quand'è che $f(x) = \frac{1}{x^2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

dunque basta scegliere $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ e la def. è soddisfatta (perché sono tutti "successivi")

"En passant" lo provo anche che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ (idem, con $x > N$)

- Verifichiamo che $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Tesi: $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - 0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Sia dunque $M > 0$: si ha $f(x) > M \iff \frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$

perciò basta scegliere $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

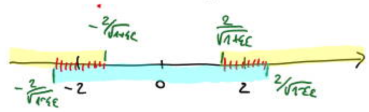
- Verifichiamo che $\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{1}{4}$ $(= f(2))$.

Tesi: $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-\frac{1}{4}|<\varepsilon$.

Sia dunque $\varepsilon>0$: si ha $|f(x)-\frac{1}{4}|<\varepsilon \iff |\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4}|<\varepsilon$

$\iff |4-x^2|<4\varepsilon x^2 \iff -4\varepsilon x^2<4-x^2<4\varepsilon x^2 \iff$

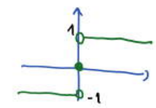
$$\begin{cases}(1+4\varepsilon)x^2>4\\(1-4\varepsilon)x^2<4\end{cases} \overset{0<\varepsilon<1}{\iff} \begin{cases}|x|>\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}}\\|x|<\frac{2}{\sqrt{1-4\varepsilon}}\end{cases}$$



Possiamo scegliere $\delta = \min\left\{\frac{2}{\sqrt{1-4\varepsilon}}-2,\ 2-\frac{2}{\sqrt{1+4\varepsilon}}\right\}$.

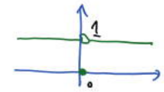
"Analogamente" lo verifico anche che $\lim_{x\to-2} f(x)=\frac{1}{4}$.

Ex. Funzione SEGNO $\text{sign}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\text{sign}(x)=\begin{cases}-1 & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ 1 & \text{se } x>0\end{cases}$



In questo caso $\nexists \lim_{x\to0} f(x)$ (non c'è una tendenza valida per TUTTI i modi di tendere a $x_0=0$).

Sia ora $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=\text{sign}^2$: $g(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\neq0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$



In questo caso $\lim_{x\to0} g(x)=1$ (anche se $g(0)=0\neq1$):

infatti, preso un $\varepsilon>0$, per $x\neq0$ si ha $|g(x)-1|\equiv0<\varepsilon$.

Dunque a priori il limite NON ha nulla a che fare col valore della funzione nel punto in questione (ammesso che tale punto stia nel dominio A!)

(Le funzioni in cui invece il limite in x_0 coincide col valore $f(x_0)$ si dicono CONTINUE in x_0, e lo vedremo più tardi: in questo caso potremmo dire che $g(x)$ è "discontinua" in $x_0=0$, ma continua in tutti gli altri punti del dominio.)

Un importante legame tra il limite in variabile reale e le successioni è il seguente:

Prop. Vale $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff$ $\forall$ successione a_n in A t.c. $a_n\to x_0$ e $a_n\neq x_0\ \forall n$ si ha che $f(a_n)\to l$

Dim. Necessità ($\Rightarrow$)

Sia data una succ. a_n di punti di A diversi da x_0 t.c. $a_n\to x_0$.

Tesi: $f(a_n)\to l$, ovvero $\forall V$ int. di l $\exists n_V\in\mathbb{N}: f(a_n)\in V\ \forall n\geq n_V$.

Sia dunque V un intorno di l. Sappiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, dunque $\exists U$ int. di x_0 t.c. $\forall x\in U,\ x\neq x_0 \Rightarrow f(x)\in V$.

Inoltre sappiamo che $a_n\to x_0$, dunque per quest'intorno U $\exists n_U\in\mathbb{N}$ t.c. $a_n\in U\ \forall n\geq n_U$. Dunque $f(a_n)\in V$, e siamo a posto.

Sufficienza ($\Leftarrow$)

Dimostriamo che se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non è l allora possiamo trovare quelle successioni di punti di A tendenti a x_0 le cui successioni delle immagini però non tende a l.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non è l, dobbiamo negare la def. di limite.

$\exists\, V$ int. di l t.c. $\forall U$ int. di x_0 si ha $f((U\cap A)\setminus\{x_0\}) \not\subseteq V$.

In particolare ciò deve accadere anche per gli intorni di base U_n di x_0 (dove se $x_0\in\mathbb{R}$ è $U_n = B_{x_0}(\frac{1}{n})$, e se ad es. $x_0=+\infty$ è $U_n =]n,+\infty[$):

dunque, se ad es. supponiamo $x_0\in\mathbb{R}$,

$\exists\, V$ int. di l t.c. $\forall n\in\mathbb{N}$ si ha $f((B_{x_0}(\frac{1}{n})\cap A)\setminus\{x_0\}) \not\subseteq V$

cioè $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists\, a_n\in A : \begin{cases} |a_n-x_0|<\frac{1}{n} \\ a_n\neq x_0\end{cases}$ ma $f(a_n)\notin V$.

Ma allora la succ. a_n tende a x_0 ma $f(a_n)\not\to l$.

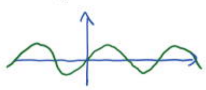
Idem nel caso $x_0=\pm\infty$ (esercizio) □

Prop. Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ se esiste è unico.

Dim. Ricalca quella già vista per le successioni (esercizio)

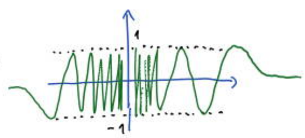
Come già visto per $f(x)=\operatorname{sign} x$ in $x_0=0$, il limite può non esistere!

$\boxed{\text{Ex}}$ • $f(x)=\sin x$



$x_0=+\infty$ $\nexists \lim_{x\to+\infty}\sin x$.

• $h(x)=\sin\frac{1}{x}$ "seno del topologo"



Invece $\exists \lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x} = 0^+$

Notiamo, per $f(x)=\sin x$, che le successioni $a_n=n\pi$ e $b_n=\pi/2+n\pi$ tendono entrambe a $x_0=+\infty$, ma $f(a_n)\equiv 0$ mentre $f(b_n)\equiv 1$: dunque $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ NON può esistere! (Bisognerebbe che $\forall$ successione che tende a $x_0=+\infty$ il limite fosse lo stesso!)

Idem per $h(x)=\sin 1/x$, con $x_0=0$ e $a_n=\frac{1}{n\pi}$, $b_n=\frac{1}{\pi/2+n\pi}$

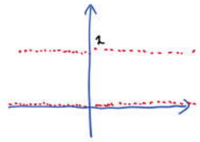
Prop. (LIMITI DELLE RESTRIZIONI)
Sia $f: A\to\mathbb{R}$, $B\subseteq A$, $x_0\in\tilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione sia per A che per B.
Allora $\exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)=l \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \exists \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B}} f(x)$ ed è uguale a l

Dim. Ovvio: sia b_n una successione di punti di B che tende a x_0.
Tesi: $f(b_n)\to l$. Ma le succ. b_n è anche in A, dunque già lo sappiamo.
Viceversa: falso in generale. Vediamo alcuni esempi in cui esistono limiti di restrizioni ma non il limite in tutto il dominio.

Es. • $f(x) = \sin x$, $x_0 = +\infty$, $A = \mathbb{R}$, $B = \{m\pi : m \in \mathbb{N}\}$.

• $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$, $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_{>0}$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in B}} f(x) = 1$ (è un limite destro!), ma $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in A}} f(x)$ non esiste.

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \widetilde{\mathbb{Q}} \end{cases}$ (funzione caratt. di $\mathbb{Q}$)



Sia x_0 qualunque: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{Q}}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\widetilde{\mathbb{Q}}}} f(x) = 0$.

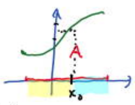
Dunque $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. □

Abbiamo visto che l'esistenza del limite in un punto implica l'esistenza (e l'uguaglianza) del limite in quel punto anche per qualsiasi restrizione; mentre il viceversa è falso.

Di particolare importanza sono i LIMITI DESTRO E SINISTRO in un punto.

Dati $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di acc. per A, $f : A \to \mathbb{R}$,

definiamo $A^+_{x_0} := A \cap]x_0, +\infty[$ e $A^-_{x_0} := A \cap]-\infty, x_0[$

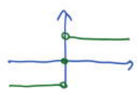


Pongo poi $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) := \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A^-_{x_0}}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) := \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in A^+_{x_0}}} f(x)$

Prop | $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ esiste $\iff$ esistono entrambi $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x)$ e sono uguali tra loro

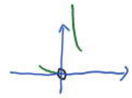
Dim. Necessità ovvia per quanto visto prima. Sufficienza: esercizio □

Ex. • $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x_0 = 0$



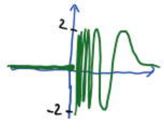
$\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm 1 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

• $f(x) = e^{1/x}$, $x_0 = 0$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^+$ $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

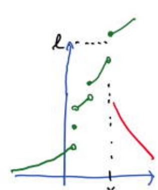
• $f(x) = \begin{cases} (1 + \operatorname{sign} x) \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$\begin{cases} \nexists \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Esaminiamo ora i risultati standard per i limiti in variabile reale.

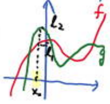
Prop. | (a) (Limiti delle funzioni monotòne)
Se $f : A \to \mathbb{R}$ è crescente e x_0 è di acc. a sinistra (ovvero di acc. per $A^-_{x_0}$), allora $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ esiste ed è uguale a $\sup\limits_{\widetilde{\mathbb{R}}} \{f(x) : x \in A, x < x_0\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$



Idem per gli altri casi (f decrescente / lim dx)

(b) (Permanenza del segno)

Se esistono i limiti $\ell_1 = \lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\ell_2 = \lim_{x\to x_0} g(x)$ con $\ell_1 < \ell_2$, allora $f(x) < g(x)$ all'intorno di x_0 (con $x \neq x_0$), ovvero $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $f(x) < g(x)$ $\forall x \in U \cap A$, $x \neq x_0$



(c) (Confronto) Se $f(x) \leq g(x)$ all'intorno di x_0 (con $x \neq x_0$) allora, se esistono, si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

(d) (Carabinieri)

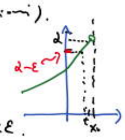
(i) Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ all'intorno di x_0 ed esistono e sono uguali e finiti $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x)$, allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} g(x)$ ed è uguale ad essi.

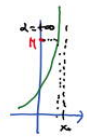
(ii) Se $f(x) \leq g(x)$ all'intorno di x_0 e $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$; e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, anche $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

(e) (Limiti e operazioni). Valgono le compatibilità con le operazioni già enunciate per i limiti delle successioni.

Dim. Diamo solo un paio di dimostrazioni, lasciando le altre per esercizio (seguono le stesse tracce già viste per le successioni).

Monotonia. Sia $\alpha := \sup_{\widetilde{\mathbb{R}}} \{ f(x) : x < x_0 \}$.





Sia ad esempio $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tesi: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \begin{cases} x < x_0 \\ |x - x_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

Sia dunque $\varepsilon > 0$. Poiché $\alpha - \varepsilon < \alpha$, $\exists\, t < x_0$ t.c. $\alpha - \varepsilon < f(t) \leq \alpha$.

Ora visto che f è crescente, $\forall x \in]t, x_0[$ ho che $\alpha - \varepsilon < f(t) \leq f(x) \leq \alpha$

ovvero $f(]t, x_0[) \subset B_\alpha(\varepsilon)$. Dunque posso prendere $\delta = x_0 - t$

Se invece $\alpha = +\infty$ Tesi: $\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \begin{cases} x < x_0 \\ |x - x_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow f(x) > M$

Sia dunque $M > 0$. Poiché $\alpha = +\infty$, di certo $\exists\, t < x_0$ t.c. $f(t) > M$;

anche qui, per la crescenza di f, si ha che $f(]t, x_0[) \subset]M, +\infty[$

dunque anche qui posso prendere $\delta = x_0 - t$.

Perm. segno, confronto, carabinieri lasciamo per esercizio, così come gran parte delle compatibilità con le operazioni. Ne vediamo un paio.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) g(x) = \ell_1 \ell_2$.

Tesi: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \begin{cases} |x - x_0| < \delta \\ x \neq x_0 \end{cases} \Rightarrow |f(x) g(x) - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$.

Sia dunque $\varepsilon > 0$, e sia $L > 0$ un qualsiasi numero positivo $> |\ell_2|$.

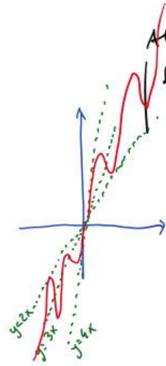
Poiché so che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, so anche che f è limitata all'intorno di x_0, ovvero $\exists\, M > 0$ t.c. $|f(x)| < M$ all'int. di x_0,

e so che per il dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta' > 0$ t.c. $\begin{cases} |x - x_0| < \delta' \\ x \neq x_0 \end{cases} \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2L}$.

Poi, visto che $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$, sia $\delta'' > 0$ t.c. $\begin{cases} |x - x_0| < \delta'' \\ x \neq x_0 \end{cases} \Rightarrow |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Allora, posto $\delta := \min(\delta', \delta'')$, se $\begin{cases} |x-x_0|<\delta \\ x \neq x_0 \end{cases}$ si ha che

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell_1\ell_2| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\
&= |f(x)(g(x)-\ell_2) + (f(x)-\ell_1)\ell_2| \\
&\leq |f(x)(g(x)-\ell_2)| + |(f(x)-\ell_1)\ell_2| \\
&\leq |f(x)|\cdot|g(x)-\ell_2| + |f(x)-\ell_1|\cdot|\ell_2| \\
&\leq M\cdot \tfrac{\varepsilon}{2M} + \tfrac{\varepsilon}{2L}\cdot L = \varepsilon.
\end{aligned}$$



Altri esempi: (in part. ciò accade se $\exists \lim_{x\to x_0} g(x) \gneq 0$)

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ed $\exists\, a>0$ t.c. $g(x)>a$ all'int. di x_0 [si dice "g è lontana da 0"]

allora $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.

> Questo enunciato funziona per funzioni $g(x)$ che si mantengono "a distanza di sicurezza da 0" (anche se possono non ammettere limite in x_0). Esempio: $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{f\to+\infty}\underbrace{(3+\sin x)}_{g(x)>a=1{,}8} = +\infty$

Tesi: $\forall M>0$ $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $\begin{cases} x\in U \\ x\neq x_0 \end{cases} \Rightarrow f(x)g(x) > M$.

Sia dunque $M>0$. Sappiamo che $\exists\, U'$ int. di x_0 t.c. $\begin{cases} x\in U' \\ x\neq x_0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > M/a$,
ed $\exists\, U''$ int. di x_0 t.c. $\begin{cases} x\in U'' \\ x\neq x_0 \end{cases} \Rightarrow g(x) > a$.
Allora, posto $U = U'\cap U''$, per ogni $x\in U$ con $x\neq x_0$ avremo che
$f(x)g(x) > \frac{M}{a}\cdot a = M$ $\square$

Anche qui, dopo questi risultati diventano già esame operativi nel calcolo della maggior parte dei limiti.

$\boxed{\text{Ex.}}$ · Visto che exp, log, potenze sono monotòne, posso applicare quest. risult. sulla monotonia per concludere che
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty = \sup_{\mathbb{R}}\{e^x : x\in\mathbb{R}\}$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ = \inf_{\mathbb{R}}\{e^x : x\in\mathbb{R}\}$, $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty = \inf_{\mathbb{R}}\{\log x : x>0\}$, ...

· $\lim_{x\to 1} \dfrac{2e^x - 3\sin x}{x+2} = \dfrac{2e - 3\sin 1}{3}$ (per la compatibilità con le operazioni)

$\lim_{x\to+\infty} e^x \overbrace{\operatorname{arctg} x}^{\text{lontana da 0}} = +\infty$

E' il caso di vedere un risultato assai utile:

Prop. (cambio delle variabili) $\underset{\substack{t_0 \\ \text{var. } t}}{B} \xrightarrow{\phi} \underset{\substack{x_0 \\ \text{var. } x}}{A} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ $\qquad x = \phi(t)$

Siano x_0 di acc. per A, t_0 di acc. per B, ϕ biiettiva t.c. $\lim_{t\to t_0} \phi(t) = x_0$.
Allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to t_0} f(\phi(t))$ esiste, e i due sono uguali

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = ??$ $0/0$ Poniamo $e^x-1=t$ ovvero $e^x = 1+t$ ovvero $x=\log(1+t)=\phi(t)$; qui $A=\mathbb{R}_x$, $x_0=0$, $t_0=0$, $B=\,]-1,+\infty[$: $\phi: B\to A$ biiettiva.

So che $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}$; vedremo presto che entrambi valgono 1.

• $\lim_{x\to 0} x e^{1/x} = ??$ Anzi: $\lim_{x\to 0^-} x e^{1/x} \overset{0^-\cdot 0^+}{=} 0^-$. Ma $\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x} = ?$ $0\cdot(+\infty)$

Poniamo $x=\phi(t)=1/t$: $\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} e^t/t$ (vedremo che vale $+\infty$).
($\phi:]0,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ bij)
($t_0=+\infty$) ($x_0=0$)

ESERCIZI PER CASA. Calcolare i sgg. limiti in variabile reale.

• $\lim_{x\to 0}(3x^2-5x-6)e^{1/x}$ • $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2+4)}{1/x-\alpha}$ ($\alpha\in\mathbb{R}$) • $\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2(\pi x)}{\log x}$

• $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x-x^2}+2\operatorname{arctg} x}{\log(x^4-1)}$ • $\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{arctg}(2-e^{1-x})}{\operatorname{cotg}(\pi x)}$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Per risolvere gli esercizi appena assegnati bisogna usare la nozione di "funzione continua" e il fatto che ogni funzione elementare (exp, log, potenze, goniometriche, modulo ..) è continua in ogni punto del suo dominio: tutto questo lo vedremo meglio nella prossima lezione, ma si vedano fin d'ora i seguenti esempi di applicazione:

$\boxed{\text{Ex}}$ • $\lim_{x\to 1}\sin(\log x) = 0$ (per continuità di sin, log e della composizione)

• $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1/(x-2)}}{\sqrt{x+4}} = \frac{e^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$ (per continuità di exp, $\sqrt{\cdots}$ e per compatibilità con le operazioni)

• $\lim_{x\to+\infty}(a^{1/x}-x)$ ($a>0$). Quando x tende a $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tende a 0^+, e dunque $a^{1/x}$ tende a 1 per ogni $a>0$
(infatti è il quadro $B\xrightarrow{\phi}A\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ con $y=\phi(x)=1/x$, $x_0=+\infty$, $y_0=0$ e $f(y)=a^y$: sappiamo che f è continua in y_0 e che $\lim_{x\to x_0}\phi(x)=y_0$, dunque per quanto visto in (c) si ha $\lim_{x\to x_0} f(\phi(x)) = f(y_0)=1$) : dunque, poiché $-x$ tende a $-\infty$, il limite vale $-\infty$.