

ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di martedì 28/10/2014

Come preannunciato, per il calcolo dei limiti si rende necessario parlare di

FUNZIONI CONTINUE

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$.

Si dice che f è continua in x_0 se x_0 è pto isolato di A
oppure, se x_0 è di accum. per A , quando

$$(1) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

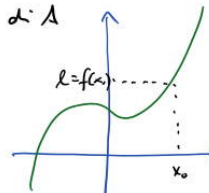
o, equivalentemente

$$(2) \quad \text{Entrambi } \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) \text{ e sono uguali a } f(x_0)$$

o anche

$$(3) \quad \forall \text{ succ. } a_n \in A, a_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(x_0)$$

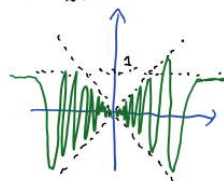
Si dirà poi che f è continua (in A) se lo è in ogni pto di A



[Ex.] • $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $x_0 = 0$? Non lo sono, p. ch' $x = 0$ non è nel dom.

• $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Continua in $x_0 = 0$? No: $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

• $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ continua! in $x_0 = 0$



Prop. | Le funzioni elementari (moduli, potenze, exp, log, potenze, goniometriche, ...) sono continue

Dim. Ad es, per $f(x) = e^x$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, $1+t \leq e^t \leq \frac{1}{1-t}$ derivata in $t=0$.
 $|e^x - e^{x_0}| = e^{x_0} |e^{x-x_0} - 1|$, dove pos. $t = x - x_0$ ho

$$e^{x_0}|t| < |e^x - e^{x_0}| < e^{x_0} \left| \frac{1}{1-t} - 1 \right|$$

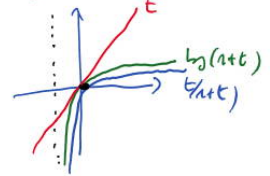
$t \rightarrow 0$ $\downarrow$ *caus.* $t \rightarrow 0$ $\text{ovvero } \lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{x_0}$

Allora es, per $f(x) = \lg x$. Dato $x_0 > 0$,

$$|\lg x - \lg x_0| = \left| \lg \left(\frac{x}{x_0} \right) \right| = \left| \lg \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right) \right|$$

(ricordiamo che per $t > -1$ vale $\frac{t}{1+t} \leq \lg(1+t) \leq t$)

$$\xrightarrow[t \rightarrow 0]{(x \rightarrow x_0)} 0, \text{ ovvero } \lim_{x \rightarrow x_0} \lg x = \lg x_0.$$



Ultimo, per $f(x) = \sin x$: dato $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \cos \frac{x_0 + x}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|$$

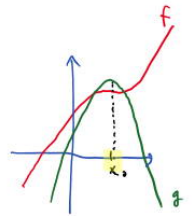
$$\xrightarrow[x \rightarrow x_0]{x \rightarrow x_0} 0, \text{ ovvero } \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

□

Prop. (Proprietà delle funzioni continue in un p.w.)

(a) (Continuità e operazioni)

- se f, g sono continue in x_0 , lo sono anche $f+g, fg$.
- se $\alpha \in \mathbb{R}$ e f è continua in x_0 , α è anche αf
- se $g(x_0) \neq 0$ e f, g continue, allora f/g è definita all'intorno di x_0 ed è ivi continua.



(b) (Permanenza del segno) se f, g continue in x_0 con $f(x_0) < g(x_0)$ allora si ha $f(x) < g(x)$ all'intorno di x_0 .

(c) (Limiti di funzioni composte e composizioni di f.z. continue.)

$$\bullet \quad B \xrightarrow[t_0]{\phi} A \xrightarrow[x_0]{f} \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua in } x_0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \phi(t) = x_0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f(\phi(t)) = f(x_0)$$

$$\bullet \text{ In part., } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ aut. in } x_0 \\ \phi \text{ aut. in } t_0 \text{ con } \phi(t_0) = x_0 \end{array} \right. \Rightarrow f \circ \phi \text{ è continua in } t_0.$$

(d) (Restrizioni) Restrizioni di funzioni continue sono ancora continue.

$$\boxed{\text{Ex}} \quad f(x) = \frac{\sin(\sqrt{x^2-4}) + 3 \log(\arccos(5e^{8x}))}{7 \arctan(\sqrt[3]{x-1})}$$

è continua in ogni pts. del suo dominio naturale.

A quest. pts. siamo in grado di risolvere tutti i limiti tranne quelli nelle gr. note forme indeterminate $+\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞ , ...

$$\boxed{\text{Ex}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sin(\log x) = 0 \quad (\text{per continuità di } \sin, \log \text{ e delle composizioni})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}-2}}{\sqrt{x+4}} = \frac{e^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{e}} \quad (\text{per continuità di } \exp, \sqrt{\cdot} \text{ e per compatibilità con le operazioni})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^{\frac{1}{x}} - x) \quad (a > 0)$$

Quando x tende a $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tende a 0^+ ,
e dunque $a^{\frac{1}{x}}$ tende a 1 per ogni $a > 0$
(infatti è il quadro $B \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ con $y = \phi(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = +\infty$,
 $y_0 = 0$ e $f(y) = a^y$: sappiamo che f è continua in y_0 e che
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = y_0$, dunque per quanto visto in (c) si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\phi(x)) = f(y_0) = 1$):
dunque, poiché $-x$ tende a $-\infty$, il limite vale $-\infty$.

ESERCIZI PER CASA. Calcolare i segg. limiti in variabile reale.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 5x - 6)e^{\frac{1}{x}} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2+4)}{\frac{1}{x}-2} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x)}{\log x} \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-x^2} + 2 \arctan x}{\log(x^4-1)} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(2-e^{1-x})}{\arctan(\pi x)} \end{aligned}$$

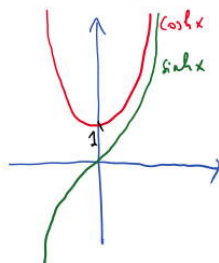
($2 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 5x - 6)e^{\frac{1}{x}} = 0^- \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 - 5x - 6)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+4)}{\frac{1}{x}-2} &= \begin{cases} +\infty & (\mu \geq 0) \\ (-\text{sign} a)\infty & (\mu \neq 0) \end{cases} \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{\cos^2(\pi x)}{\ln x} &= \pm\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{\arctan(2-e^{1-x})}{\cot(\pi x)} &= 0^\pm \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-x^2} + 2\arctan x}{\ln(x^4-1)} &= 0^-
 \end{aligned}$$

Completiamo la nostra collezione di funzioni elementari...

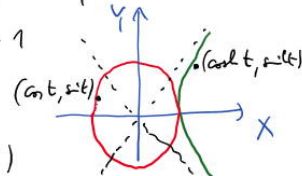
FUNZIONI IPERBOLICHE



$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Coseno Iperbolico Seno Iperbolico

Notiamo che $\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1$: dunque le coppie $(\cosh t, \sinh t)$ si trovano sempre sul ramo destro dell'ipbole $X^2 - Y^2 = 1$ (ovvero tale può parametrizzare il ramo dx dell'ipbole).



nell'altro senso per cui $\cosh^2 x + \sinh^2 x \equiv 1$, ovvero $(\cosh t, \sinh t)$ sta sempre sulle circonferenze di raggio 1: $X^2 + Y^2 = 1$. Ovvero: $\cosh x$ e $\sinh x$ sono gli "analoghi iperbolici" di $\cos x$ e $\sin x$, e tra l'altro obbediscono anche a regole di calcolo del tutto analoghe: ad esempio

$$\sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} = 2 \sinh x \cosh x, \text{ etc.}$$

(SEN NOSTRO ANALOGO DI $\sin 2x \dots$)

Notiamo che $\sinh x$ è una funzione continua e biettiva, con inversa

$$\text{settsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{settsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Invece $\cosh x$ va ristretto a $[0, +\infty[$ e considerato a $[1, +\infty[$, con inv.

$$\text{settcosh} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, \quad \text{settcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

CONCENTRARE I LIMITI IN FORMA INDETERMINATA

($+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞ , ...)

Metodi principali:

- Confronto, carabinieri ... anche usando in modo "intelligente" un formulario di f.i. note.
- Confronto locale con sviluppo asintotico (settimana prossima)
- Teorema di de l'Hôpital (calcolo differenziale)

Vediamo il formulario.

Pop.

(a) (FUNZIONI RAZIONALI) siano $P(x)$, $Q(x)$ polinomi di grado $m, n > 0$, e coeff. dominanti > 0 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > n \\ \text{RAPPORTO DEI COEFF. DOM.} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}$$

(b) (EXP, LOG, POTENZE). $\forall a > 1$, $\forall p > 0$, $\forall \alpha > 0$

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty; (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha} = 0; (3) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log_a x|^\beta = 0$$

(c) (LIMITI NOTEVOLI) $\forall a > 0$, $a \neq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} = \log_a e; (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Dim. (a) base scegliere x^m sopra e x^n sotto.

(b) (1) Iniziamo dal caso $a=e$: mostriamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$

le $x > 0$ (stanno facendo un limite in $+\infty$!)

le succ. esponenziali $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ è crescente in n
fin da $n=1$: $1 < 1+x < (1+\frac{x}{2})^2 < \dots$

Dunque, per $p, q \in \mathbb{N}$ t.c. $p \leq p < q$ si ha che

$$\frac{e^x}{x^p} > \frac{(1+\frac{x}{q})^q}{x^p} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ per (a), e si conclude per confronto.}$$

Nel caso generale, facciamo un cambio di variabile $x = \frac{1}{\log a} t$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{t}{\log a}}}{(\frac{1}{\log a})^p t^p} = +\infty$$

Per $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^2}$ poniamo $x = a^t$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^p}{(a^t)^2} = 0 \text{ per (1).}$$

Per $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^q |\log_a x|^p$ poniamo $x = \frac{1}{t}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} |\log a t|^p = 0 \text{ per (2a)}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Le funzioni $\frac{\sin x}{x}$ è pari, dunque basta $\lim_{x \rightarrow 0^+}$.

Quando $0 < x < \frac{\pi}{2}$ si ha $\sin x < x < \tan x$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$. Se $a=e$, da $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \Rightarrow$
 $x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \Rightarrow \xrightarrow{(x \rightarrow 0^+)} 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$ e poi
 $\xrightarrow{(x \rightarrow 0^-)} \frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1$ combinando

In generale basta fare il solito cambio di variabile.

(4) e (5) si ricavano da (3) con un opportuno cambio di variabile (esercizio)

Esercizio 2

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^a - 3x\sqrt{x} + 2}{2x^{a-1} + x^2}$

$\xrightarrow{\quad} a$
 $\begin{array}{ccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} \\ & 3/2 & & 3 & \end{array}$

① ($a < 3/2$) $\frac{x^{3/2}(-3 + 4x^{a-3/2} + 2x^{-1/2})}{x^2(1 + 2x^{2-3})} \rightarrow 0^-$

② ($a = 3/2$) $\frac{x\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x} + x^2} \rightarrow 0^+$

③ ($3/2 < a < 3$) $\frac{x^a(4 - 3x^{3/2-a} + 2x^{-a})}{x^2(1 + 2x^{2-3})} \rightarrow \begin{cases} 0^+ & (a < 2) \\ 4 & (a = 2) \\ +\infty & (a > 2) \end{cases}$

④ ($a = 3$) $\frac{4x^3 - 3x\sqrt{x} + 2}{3x^2} = \frac{4x^3 - 3x^{3/2} + 2x^{-3}}{3x^2} \rightarrow +\infty$

⑤ ($a > 3$) $\frac{x^a(4 - 3x^{3/2-a} + 2x^{-a})}{x^2(1 + 2x^{2-3})} \rightarrow +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^a}$ $\begin{cases} a \leq 0 : 0^+ \\ a > 0 : \frac{\sin x}{x^a} = \frac{\sin x}{x} \cdot x^{1-a} \rightarrow \begin{cases} 0 & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a < 1 \end{cases} \end{cases}$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\ln x}$ $\begin{cases} a \neq 1 : (\text{sign}(1-a))\infty \\ a = 1 : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\ln x} \end{cases}$ Ponendo $t = x - 1$
 over $x = 1+t$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+t} - 1}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+t} - 1}{t} \cdot \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ $\begin{cases} a < 0 : 0^- \\ a = 0 : \equiv 0 \\ a > 0 : \frac{e^{2x}(1 - e^{-2x})}{x} \rightarrow +\infty \end{cases}$

ESERCIZI PER CASA. Calcolare i segg. limiti (eventualmente al variare di $a \in \mathbb{R}$)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\lg |a-5x|}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3x - \cos x}{4e^x + e^{-x}}$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a - 1}{\lg x}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{3x^m + 1}$ (ove $n \in \mathbb{Z}$) (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1-3x^2} - 1}{|x|^a}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\lg(2x-5)}{(x-3)^a}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{(e^x - a)^2}$ (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1+x)}{x}$ (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \lg x - 1}{3 \lg x + 2 \sin x}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-2x-x^3}{3x^a + x^3}$ (11) $\lim_{x \rightarrow 0^+, +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5 \sin x}{x^a}$ (12) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+3} - 1}{\lg(3x+4)}$
- (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x^3}{\lg(3x+1)}$ (14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \sqrt{x} - 1}{\lg 2(x-1)}$ (15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lg(3-x) + 1}{|x-1|^a}$
- (16) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^a + 2x + 5e^x)$ (17) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2x)}{1 + \sin 3x}$ (18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctg x + 3e^{-x})$
- (19) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$ (20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x}}{\lg^2(1+2x)}$ (21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{2x^3 + 5x^2 + 3}$
- (22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+7+e^{\frac{1}{x}}) \sin \frac{3}{x}$ (23) $\lim_{x \rightarrow 1} (\lg^2 |1-x| + 5x)$ (24) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos^2(2x)}{\lg x}$
- (25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\pi + 2 \arctg x)$
(per $x = \frac{1}{t}$, poi...)

Nota. Va detto che con questo metodo non si è in grado di risolvere limiti che richiedono una conoscenza più approfondita delle funzioni trigon.

Es. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^2}$ ($a > 0$): qui bisognerebbe conoscere che tipo d'infinitesimo si ha al numeratore, ma questo ce lo dirà solo una conoscenza più approfondita delle funzione seno, ovvero il suo "sviluppo asintotico" vicino a $x=0$.
Ciò sarà l'oggetto delle prossime lezioni.