ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di mercoledì 29/10/2014

Vogliamo ora esaminare alcune proprietà assai importanti della CONTINUITÀ SU TUTTO IL DOMINIO (non solo in un punto x_0!) e altre proprietà topologiche notevoli.

Iniziamo con il rendere "relative" le nozioni di apertura e chiusura.

Sia X spazio topologico (ovvero un insieme in cui si è stabilita una "topologia", cioè la famiglia degli aperti: p.es. $\mathbb{R}$ oppure $\tilde{\mathbb{R}}$ con la Top. euclidea).
Sia ora A un qualsiasi sottoinsieme di X.

Si dice che $B \subseteq A$ è APERTO in A se $\exists\, U$ aperto di X : $B = A \cap U$:
ovvero gli aperti di A sono quelli ottenuti intersecando A con aperti di X.
In questo modo si definisce la TOPOLOGIA RELATIVA (o INDOTTA) DI A.
Idem per la nozione di CHIUSO in A

Prop. • Se A è aperto di X, allora un $B \subseteq A$ aperto in A è aperto anche in X.
(però se A non è un aperto di X ciò non è detto)
• Idem se A è chiuso in X per i chiusi

Ex. • $X = \mathbb{R}$, $A = \underbrace{[0,3]}_{}$ (chiuso di $\mathbb{R}$). $B = [0,2[$ è aperto in A perché $B = A \cap\,]2,+\infty[$ (U aperto di $\mathbb{R}$)
ma B NON è un aperto di $\mathbb{R}$. Invece $C = [1,3]$ è chiuso in A e anche in $\mathbb{R}$.

• $X = \tilde{\mathbb{R}}$, $A = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ è aperto in $\tilde{\mathbb{R}}$ (intorno di ogni suo punto) ma non chiuso ($+\infty$ è di acc. per $\mathbb{R}$ ma $+\infty \notin \mathbb{R}$): dunque ogni aperto di $\mathbb{R}$ è aperto anche in $\tilde{\mathbb{R}}$, mentre un chiuso di $\mathbb{R}$ può non esserlo in $\tilde{\mathbb{R}}$: esempio $B = [0,+\infty[$.
esempio $B = [0,+\infty[$. Possiamo dire però che un chiuso di $\mathbb{R}$ lo è anche in $\tilde{\mathbb{R}}$ se e solo se è compatto in $\mathbb{R}$ (ovvero limitato).

(su tutto il dominio, non solo in un punto)

Enunciamo ora le principali proprietà GLOBALI della continuità

Prop. (a) $f: A \to \mathbb{R}$ è continua $\iff$ l'anti-immagine di ogni aperto di $\mathbb{R}$ è aperta in A.
(o idem con i chiusi)

In particolare:

- Se $f, g: A \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora
  $B = \{x \in A : f(x) < g(x)\}$ è un aperto di A,

  i sottoinsiemi definiti da disuguagl. strette sono APERTI!

  $B' = \{x \in A : f(x) \le g(x)\}$
  $B'' = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$
  sono chiusi di A

  i sottoinsiemi definiti da disuguagl. larghe o da equazioni sono CHIUSI!

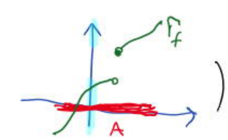
- (PRINCIPIO D'IDENTITÀ).

  Se $f, g: A \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue che coincidono su un sottoinsieme DENSO di A, allora coincidono su tutto A.
  (si ricorda che $A' \subseteq A$ si dice DENSO in A se tutti i punti di A sono di chiusura per A': ad esempio $A' = A \cap \mathbb{Q}$)

(b) (IMMAGINI CONTINUE DI INTERVALLI SONO INTERVALLI)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua e A intervallo $\Rightarrow$ $f(A)$ è intervallo.

(se f non è continua, ciò può non accadere:



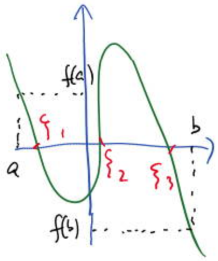
)

In particolare:

- (TEOREMA DI TUTTI I VALORI, O DEGLI ZERI, O "PASSAGGIO DI DOGANA")

  Sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua, e sia $[a,b] \subseteq A$ con $f(a) < f(b)$.

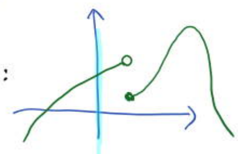
  Allora $\boxed{\forall \eta \in [f(a), f(b)] \quad \exists \xi \in [a,b] : \ f(\xi) = \eta}$



In particolare, se $f(a)<0$ e $f(b)>0$ (o viceversa) di certo esiste qualche $\xi \in [a,b]$ t.c. $f(\xi)=0$.

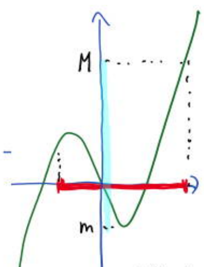
(CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTÒNE)

Se A è intervallo e $f: A \to \mathbb{R}$ monotona, allora f è continua $\iff$ $f(A)$ è un intervallo

(ciò può non essere vero se f non è monotona: )

(d) (IMMAGINI CONTINUE DI COMPATTI SONO COMPATTE)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua e A è compatto (chiuso e limitato), allora $f(A)$ è compatto.



$f(x) = x(x^2-1)$

Corollario:

- (T. DI WEIERSTRASS) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto, ogni funzione continua $f: A \to \mathbb{R}$ ammette estremi (cioè max e min) assoluti.

Per la dim. vedremo più tardi.

Una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ è detta LIPSCHITZIANA (in A) se esiste una costante $L \geq 0$ (detta "costante di Lipschitz" per f su A) t.c.

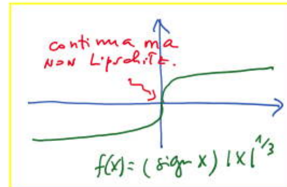
$$|f(x') - f(x'')| \leq L\,|x' - x''| \qquad \forall\, x', x'' \in A$$

ovvero

$$\left| \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \right| \leq L \qquad \forall\, x', x'' \in A, \quad x' \neq x''.$$

ovvero "la pendenza di f è limitata in A".

Una funzione può essere continua senza essere lipschitziana (vedi a dx); quanto al viceversa...



Prop. | Una funzione lipschitziana in A è continua in A

Dim. Sia $x_0 \in A$: la tesi è che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Si dia $\varepsilon > 0$. Si ha

$|f(x) - f(x_0)| \le L\,|x - x_0|$, dunque, definito $\delta := \varepsilon / L$,

se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| \le L \cdot \varepsilon / L = \varepsilon$. □.

$\boxed{\text{Ex.}}$

- $f(x) = \sin x$ è lipsch. su $\mathbb{R}$. Infatti

$$|\sin x' - \sin x''| = 2 \underbrace{\left|\cos \frac{x'+x''}{2}\right|}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left|\sin \frac{x'-x''}{2}\right|}_{|\sin t| \le |t|} \le \cancel{2} \cdot 1 \cdot \frac{|x'-x''|}{\cancel{2}} = \overset{L}{1} \cdot |x'-x''|$$

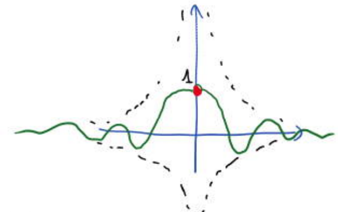
- $f(x) = x^2$ non è lipsch. su $\mathbb{R}$, ma lo è su $A = [a,b]$. Se $x', x'' \in [a,b]$:

$$|x'^2 - x''^2| = |x'+x''| \cdot |x'-x''| \le (|x'| + |x''|) \cdot |x'-x''| \le \underbrace{2 \max\{|a|,|b|\}}_{L:\ \text{è il massimo modulo delle derivate}} |x'-x''|$$

(Morale: la pendenza di $f(x) = x^2$ non è limitata su tutto $\mathbb{R}$, ma lo è se la si restringe al compatto $[a,b]$.)

PUNTI DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILI: assegnando come valore di una funzione in un punto di accum. del dominio il valore finito del limite in tal punto si ottiene una funz. continua.

Ex. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Però, poiché $\lim_{x\to 0} f(x)=1$, si def. $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

come $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x)=\frac{\sin x}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$, allora $\tilde{f}$ è continua in $\mathbb{R}$,

---

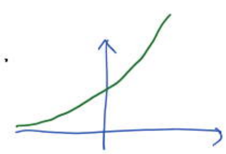
OMEOMORFISMO

Se $A,B\subseteq\mathbb{R}$, un OMEOMORFISMO tra A e B è una funzione $f:A\to B$ continua e biiettiva e con inversa $f^{-1}:B\to A$ pure continua.

In tal caso A e B si dicono OMEOMORFI (significato: "topologicamente indistinguibili")

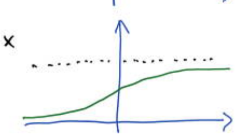
Ex. · Due intervalli dello stesso tipo sono sempre omeomorfi.

Esempio: $A=\mathbb{R}$, $B=]0,+\infty[$ $f=\exp$



$A=\mathbb{R}$, $B=]0,1[$ $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$

oppure $g(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+|x|}$



$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$

$\operatorname{arctg} x=\pi(y-1/2)$ $x=\operatorname{tg}(\pi(y-1/2))$

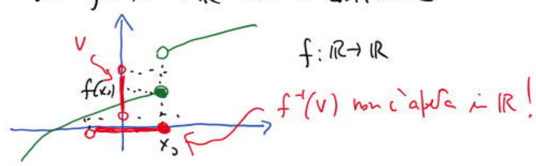
Un importante criterio di iniettività (e di omeomorfismo) per funzioni continue su intervalli:

Prop. Sia A intervallo di $\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ continua. Allora f è iniettiva $\iff$ f è strettamente monotona e in tal caso induce un omeomorfismo tra A e $B:=f(A)$.

Vediamo alcune dimostrazioni degli enunciati.

> (a) $f: A \to \mathbb{R}$ è continua $\iff$ l'anti-immagine di ogni aperto di $\mathbb{R}$ è aperta in A.
> (o idem con i chiusi)

(a) Prima di tutto, notiamo che se $f: A \to \mathbb{R}$ non è continua l'enunciato è falso:



Invece vediamo che se f è continua la cosa funziona.

Necessità. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua, e sia V un aperto di $\mathbb{R}$.

Tesi: $f^{-1}(V)$ è aperto in A, ovvero si può scrivere $f^{-1}(V) = U \cap A$ con U ap. di $\mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in f^{-1}(V)$ (dunque $f(x_0) \in V$). Poiché f è continua in x_0,

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $f(B_{x_0}(\delta) \cap A) \subset V$, cioè $B_{x_0}(\delta) \cap A \subset f^{-1}(V)$.

Poniamo allora $U := \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(V)} B_{x_0}(\delta)$: si ha allora $U \cap A \subset f^{-1}(V)$

ma anche viceversa (ovvio), dunque $U \cap A = f^{-1}(V)$.

Sufficienza. Supp. che l'antimmagine di ogni aperto di $\mathbb{R}$ sia aperta in A.

Sia $x_0 \in A$: Tesi f continua in x_0. possiamo supp. un aperto: base di intorni

Consideriamo $f(x_0) \in \mathbb{R}$, e sia V un intorno aperto di $f(x_0)$.

Tesi: $\exists\, \delta > 0$: $f(B_{x_0}(\delta) \cap A) \subset V$, ovvero $B_{x_0}(\delta) \cap A \subset f^{-1}(V)$,

ma ciò è esattamente come dire che $f^{-1}(V)$ è aperto in A (come previsto).

In particolare:

• Se $f,g: A \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora
$B = \{x \in A : f(x) < g(x)\}$ è un aperto di A,
$B' = \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$
$B'' = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$
} sono chiusi di A

(i) $f,g: A \to \mathbb{R}$ continue.

$$B = \{x \in A : f(x) < g(x)\} = \{x \in A : (f-g)(x) < 0\} = \underbrace{(f-g)^{-1}}_{\text{continua}}(\underbrace{]-\infty, 0[}_{\text{aperto}})$$
è aperto in A

$$B' = \{x \in A : f(x) \leq g(x)\} = (f-g)^{-1}(\underbrace{]-\infty, 0]}_{\text{chiuso}})$$
$$B'' = \{x \in A : f(x) = g(x)\} = (f-g)^{-1}(0)$$
} chiusi in A.

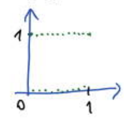
• (PRINCIPIO D'IDENTITÀ).

Se $f,g: A \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue che coincidono su un sottoinsieme DENSO di A, allora coincidono su tutto A.
(si ricorda che $A' \subseteq A$ si dice DENSO in A se tutti i punti di A sono di chiusura per A': ad esempio $A' = A \cap \mathbb{Q}$)

(ii) $f,g: A \to \mathbb{R}$ continue che coincidono su un denso $D \subset A$

$D = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ è un chiuso di A;
ma se è anche denso, ogni punto di A è di chiusura per D
ma allora $D = A$ (perché D è chiuso in A e deve contenere tutti i suoi punti di chiusura in A)

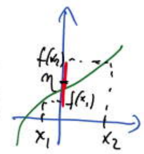
Ex. Se una funz. continua è nulla sui razionali (o sugli irrazionali), è nulla ovunque.
(ciò non vale per la funz di Dirichlet $\chi: [0,1] \to \mathbb{R}$
con $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, che è discontinua $\rightsquigarrow$



(b) (IMMAGINI CONTINUE DI INTERVALLI SONO INTERVALLI)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua e A intervallo $\Rightarrow f(A)$ è intervallo.

(b) Sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua, e siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$ (se accade il contrario la dim. è uguale)



Mi basta mostrare che $\forall \eta : f(x_1) < \eta < f(x_2)$ $\exists \xi \in [x_1, x_2] : f(\xi) = \eta$

Definiamo $A_+ = \{ x \in [x_1, x_2] : f(x) \geq \eta \}$, $A_- = \{ x \in [x_1, x_2] : f(x) \leq \eta \}$

Di certo A_+, A_- sono chiusi in $[x_1, x_2]$, che a sua volta è chiuso in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow A_+$ e A_- sono chiusi anche in $\mathbb{R}$, e sono addirittura compatti

Dunque ad esempio A_+ ammette minimo, chiamiamolo ξ.

Poiché $\xi \in A_+$, di certo $f(\xi) \geq \eta$. Inoltre di certo $x_1 \leq \xi$ (perché $\xi \in [x_1, x_2]$), ma addirittura $[x_1, \xi[\, \subseteq A_-$ (perché se qualche punto di $[x_1, \xi[$ stesse in A_+ contraddirebbe la minimalità di ξ).

$\Rightarrow \xi$ è di accum. per A_- che è chiuso $\Rightarrow \xi \in A_- \Rightarrow f(\xi) \leq \eta$

dunque $f(\xi) = \eta$. □

• (TEOREMA DI TUTTI I VALORI, O DEGLI ZERI, O "PASSAGGIO DI DOGANA")

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua, e sia $[a,b] \subseteq A$ con $f(a) \leq f(b)$.

Allora $\forall \eta \in [f(a), f(b)]$ $\exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \eta$

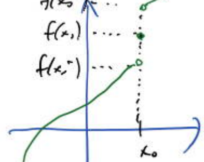
In particolare, se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (o viceversa) di certo esiste qualche $\xi \in [a,b)$ t.c. $f(\xi) = 0$.

Come conseguenza: Teorema di tutti i valori (se $f(a) < f(b)$, tutti i valori tra i due devono essere assunti da f perché l'imm. di f è intervallo)

(CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE)

Se A è intervallo e $f: A \to \mathbb{R}$ monotona, allora f è continua $\iff$ $f(A)$ è un intervallo

(c) Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con A intervallo e f ad es. crescente.
Allora già sappiamo che se f è continua allora $f(A)$ è intervallo.
Vediamo il viceversa. Supp. che f sia crescente e che $f(A)$ intervallo.
Facciamo vedere che f è continua in A.
Sia dunque $x_0 \in A$. Tesi: $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$
Poiché f è crescente, di certo esistono $f(x_0^-) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$
e $f(x_0^+) = \inf\{f(x) : x > x_0\}$.



Se per assurdo fosse $f(x_0^-) < f(x_0) < f(x_0^+)$
negherei il fatto che l'immagine di f sia un intervallo: ad es., se $f(x_0^-) < \eta < f(x_0)$ tale η non sarebbe mai raggiunto (non potrebbe essere $\eta = f(\xi)$ con $\xi < x_0$ perché $f(x_0^-) = \sup$, e nemmeno $\eta = f(\xi)$ con $\xi > x_0$ (f crescente)), assurdo.

(d) (IMMAGINI CONTINUE DI COMPATTI SONO COMPATTE)

Se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua e A è compatto (chiuso e limitato), allora $f(A)$ è compatto.

Corollario:

- (T. DI WEIERSTRASS) Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è compatto, ogni funzione continua $f: A \to \mathbb{R}$ ammette estremi (cioè max e min) assoluti.

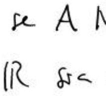
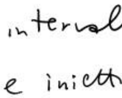
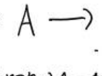
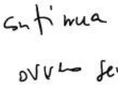
(d) Abbiamo visto che un insieme K è compatto $\iff$ è sequenzialmente compatto (ogni successione ammette qualche sottosuccessione convergente a un elem. di K)

Dunque mostriamo che $f(A)$ è sequenzialmente compatto.

Sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. in $f(A)$, dunque $y_n=f(x_n)$ per qualche $x_n\in A$.
La succ. x_n sta in A, che è compatto $\Rightarrow$ $\exists$ sottosucc. $x_{n_k}\to\bar{x}\in A$.
$\overset{(f \text{ continua})}{\Longrightarrow}$ $y_{n_k}=f(x_{n_k})\to f(\bar{x})\in f(A)$, e ci siamo!

Weierstrass ne segue subito (perché un compatto di $\mathbb{R}$ ammette max & min, e così dunque deve fare $f(A)$ se f è continua e A compatto).

Prop. Sia A intervallo di $\mathbb{R}$, $f: A\to\mathbb{R}$ continua. Allora
f è iniettiva $\Leftrightarrow$ f è strettamente monotona
e in tal caso induce un omeomorfismo tra A e $B:=f(A)$.

Infine, per la Prop. sul criterio di omeomorfismo (una funzione continua su un intervallo è iniettiva se e solo se strettamente monotona, e in tal caso è un omeomorfismo tra l'intervallo dominio e l'intervallo immagine) rimandiamo alle dispense: l'idea è grossomodo che una funzione continua NON strettamente monotona è del tipo  oppure  (con dei tratti di costanza) o del tipo  oppure  (con dei saliscendi), e in nessuno di questi casi può essere iniettiva (perché? bisogna rendere rigoroso questo ragionamento euristico, vedi la dimostrazione sulle dispense).

Come ulteriore osservazione, notiamo che se A NON è un intervallo può accadere che una funzione $f: A\to\mathbb{R}$ sia continua e iniettiva senza essere un omeomorfismo con l'immagine $f(A)$, ovvero senza che f^{-1} sia continua: ad esempio se $A=\,]-\infty,-1[\,\cup\{0\}\cup\,]1,+\infty[$ allora $f: A\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=x-\operatorname{sign}x=\begin{cases}x+1 & \text{se } x<-1\\ 0 & \text{se } x=0\\ x-1 & \text{se } x>1\end{cases}$

è continua e biiettiva ma la sua inversa $f^{-1}:\mathbb{R}\to A$ data da $f^{-1}(y)=\begin{cases}y+1 & \text{se } y>0\\ 0 & \text{se } y=0\\ y-1 & \text{se } y<0\end{cases}$ non è continua (vedi figura a lato).