

ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

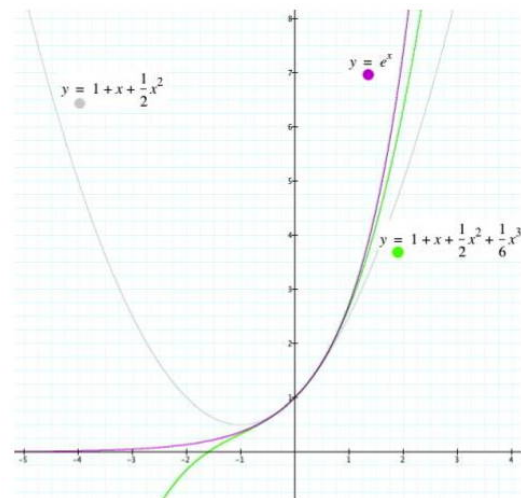
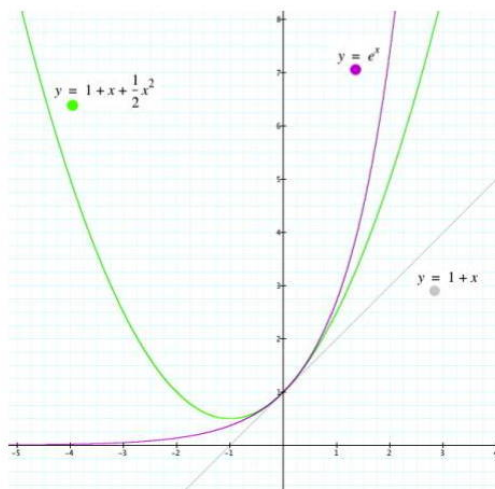
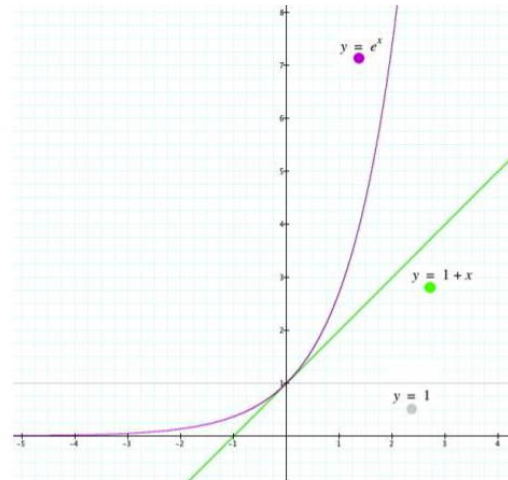
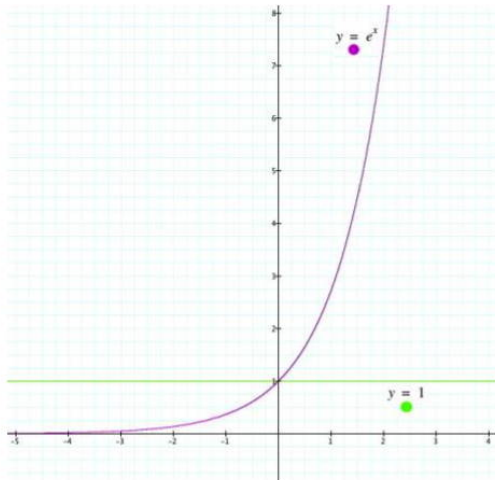
Lezione di lunedì 03/11/2014

CONFRONTO LOCALE

Il nostro scopo, fissando l'attenzione in un certo punto x_0 , è:

- fare chiarezza sui "rapporti di forza" delle varie funzioni vicino x_0 ;
- approssimare una funzione "difficile" vicino a x_0 con funzioni "facili" (ad esempio: polinomi) aggiungendo via via dei termini sempre meno significativi ma che aiutano a ridurre l'"errore" dalla funzione originale.

Ex. Approssimazione della funzione esponenziale e^x vicino a $x_0 = 0$:



A tal fine, mettiamo in chiaro le nozioni di "trascurabile" (minor forza) e di "asintoticità" (uguale forza) all'intorno di x_0 .

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e scannoleri per A , $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$.

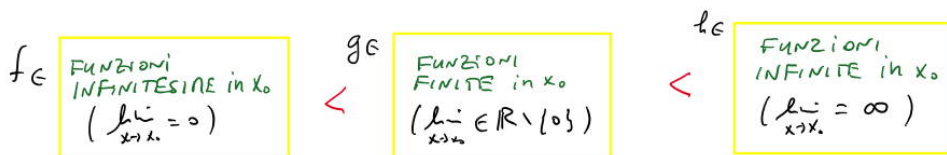
diremo che:

- (a) f è trascurabile risp. a g in x_0 (scriviamo $f = \theta_{x_0}(g)$) ^{f è "o-piccol" di g in x_0}
 se esiste un intorno U di x_0 e una funzione $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$
 infinitesima in x_0 tali che $f(x) = \phi(x)g(x) \quad \forall x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}$.
- (b) f è asintotica a g in x_0 (scriviamo $f \sim_{x_0} g$) se $f - g = \theta_{x_0}(g)$
 più generale, diremo che f è dello stesso ordine di g in x_0
 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ tale che $f \sim_{x_0} \alpha g$. (scriviamo $f \sim_{x_0}^* g$)

Nell'uso concreto, scrivere ad esempio " $f - g = \theta_{x_0}(g)$ "
 ovvero " $f = g + \theta_{x_0}(g)$ " significa " f differisce da g per
 qualcosa di trascurabile risp. a g ", e da qui, qualcosa
 spero non mi intenda conoscere esattamente le forme.

A volte al simbolo $\theta_{x_0}(g)$ si indica anche l'insieme di tutte le funzioni
 trascurabili risp. a g in x_0 .

Ad esempio, per iniziare:



di cui $\underline{f = \theta_{x_0}(g)}$, $\underline{g = \theta_{x_0}(h)}$. (ovvio e banale).

Ma la cosa più interessante è stabilire dei rapporti di trascurabilità o di asintoticità tra funzioni appartenenti a una stessa famiglia delle tre appena descritte sopra.

Ex. • $f(x) = x$, $g(x) = x^2$
 In $x_0 = 0$ vale $g = \mathcal{O}_0(f)$ (per $x^2 = \overset{5}{x} \cdot x$) (eppure sono entrambe infinite)
 In $x_0 = +\infty$ vale $f = \mathcal{O}_{+\infty}(g)$ (per $x = \overset{5}{\frac{1}{x}} x^2$) (eppure sono entrambe infinite)

È facile dimostrare che

Prop. • "Asintoticità" e "ordine dello stesso ordine" sono relazioni d'equivalenza.
 • "Trascurabilità" è relazione transitiva, non riflessiva, e soddisfa una versione forte di antisimmetria ($\alpha f = \mathcal{O}_x(g)$ e $g = \mathcal{O}_x(f) \Rightarrow f \sim g$ sono nulle all'int. di x_0)

Dim. Lasciamo per esercizio. Ad es.: asintoticità è rifl. ($f - f = 0 = \mathcal{O}_{x_0}(f)$),
 simmetrica (se $f \sim_x g$ allora $f = g + h$ dove $h = \mathcal{O}_x(g)$, dunque $h = \mathcal{O}_g$
 ovvero $f = g + \mathcal{O}_g = (1 + \mathcal{O})g \Rightarrow g = \frac{1}{1 + \mathcal{O}} f$ e dunque
 $g - f = \frac{1}{1 + \mathcal{O}} f - f = \overset{5}{\frac{-\mathcal{O}}{1 + \mathcal{O}}} f$ e dunque anche $g \sim_x f$, etc... $\square$

In realtà, per determinare trascurabilità e asintoticità si opera molto più facilmente col limite del quoziente:

Prop. Se x_0 è di acc. per A ed esiste un intorno di x_0 in cui g non si annulla mai eccetto eventualmente in x_0 , allora

(PARTICOLARE IMPORTANTE TRAMITE ALLA DEGENERAZIONE SU $\frac{1}{x}$)

(i) $f = \mathcal{O}_0(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
 (ii) $f \sim_x g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
 $f \sim_x^* g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = d \in \mathbb{R}^*$

Def. (i) $f = \Theta_x(g) \Leftrightarrow f = \mathcal{O}g$, da $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathcal{O}(x)g(x)}{g(x)} = 0$
 Viceversa, se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ significa che $\frac{f(x)}{g(x)} = \mathcal{O}(x)$ infinitesimo,
 ovvero $f = \mathcal{O}g$.
 (ii) Esercizi. $\square$

Ex.

• In $x_0 = 0^+$: $x = \mathcal{O}_0^+(\log x)$ (val' $\frac{x}{\log x} \rightarrow 0$)

$\log x = \mathcal{O}_0^+(1/x)$ (val' $\frac{\log x}{1/x} = x \log x \rightarrow 0$)

• In $x_0 = +\infty$: $\log x = \mathcal{O}_{+\infty}(x)$ (val' $\frac{\log x}{x} \rightarrow 0$)

$1/x = \mathcal{O}_{+\infty}(\log x)$ (val' $\frac{1/x}{\log x} = \frac{1}{x \log x} \rightarrow 0$)

• In $x_0 = 0$: $\sin x \sim_0 x$ (val' $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$),

$1 - \cos x \sim_0^* x^2$ (val' $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 1/2 \in \mathbb{R}^*$)

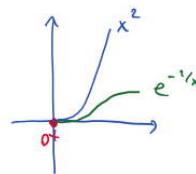
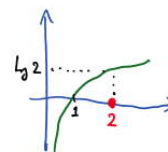
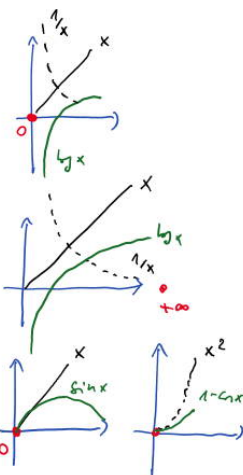
• In $x_0 = 1$: $\log x \sim_1 x - 1$.

Infatti $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} \stackrel{x-1=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$.

• In $x_0 = 2$: $\log x \sim_2 \log 2 \sim_2^* 1$

• In $x_0 = 0^+$: $f(x) = e^{-1/x}$ e $g(x) = x^2$ son entrambe
 infinitesime, ma $f = \mathcal{O}_0(g)$: infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} \stackrel{(t=1/x)}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t}}{1/t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0.$$



ARITMETICA DELLE TRASLABILITÀ

- Se $\gamma = \theta_{x_0}(g)$ allora $f\gamma = \theta_{x_0}(fg)$ (ovvero $f \cdot \theta_{x_0}(g) \subset \theta_{x_0}(fg)$)
- Se $\phi = \theta_{x_0}(f)$ e $\gamma = \theta_{x_0}(g)$ allora $\phi\gamma = \theta_{x_0}(fg)$ ($\theta_{x_0}(f) \cdot \theta_{x_0}(g) \subset \theta_{x_0}(fg)$)
- Se $f = \theta_{x_0}(g)$. Se $\phi = \theta_{x_0}(f)$ e $\gamma = \theta_{x_0}(g)$ allora $\phi + \gamma = \theta_{x_0}(g)$ (ovvero $\theta_{x_0}(f) + \theta_{x_0}(g) \subset \theta_{x_0}(g)$). In p.z.t. : $\theta_{x_0}(f) \subset \theta_{x_0}(g)$.
- Se $f \sim_{x_0}^* g$ allora $\theta_{x_0}(f) = \theta_{x_0}(g)$.

Ex. Siano $r(x) = 3x - x^2 + \theta_0(x^2)$, $s(x) = 4 - x - x^3 + \theta_0(x^3)$. Allora:

$$\begin{aligned} r(x) + s(x) &= 3x - x^2 + \theta_0(x^2) + 4 - x - x^3 + \theta_0(x^3) = 3x - x^2 + 4 - x + \theta_0(x^2) \\ &= 4 + 2x - x^2 + \theta_0(x^2) \end{aligned}$$

parte principale

$$\begin{aligned} r(x) \cdot s(x) &= (3x - x^2 + \theta_0(x^2)) \cdot (4 - x - x^3 + \theta_0(x^3)) = \\ &= 12x - 3x^2 - 3x^4 + \theta_0(x^4) - 4x^2 + x^3 + x^5 + \theta_0(x^5) + \theta_0(x^2) + \theta_0(x^3) \\ &\quad + \theta_0(x^3) + \theta_0(x^5) = 12x - 7x^2 + \theta_0(x^2) \end{aligned}$$

parte principale

Studiamo ora i rapporti tra trascurabili/asintotici e limitazioni.

- Ad es.:
- in $x \sim 1$: $\sin(\overset{\text{infinitesimo}}{\underset{\text{infinitesimo}}{\log x}}) \sim_1 \log x \ (\sim_1 x-1) \ ?$
(c'è: da $\sin t \sim_0 t$ posso comporre a destra con $t = \log x$ in $x \sim 1$?)
 - in $x \sim +\infty$: $e^{x^2-3x} \sim_{+\infty} e^{x^2} \ ?$
(c'è: da $x^2-3x \sim_{+\infty} x^2$ posso comporre a dx con $\exp$?)

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ o ∂A , $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) (Rapporti "Buoni" con la composizione $A \ni x$)

$$\text{Se } \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\phi} & A \\ \downarrow p & & \downarrow \phi_0 \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & f \\ & & \downarrow \\ & & g \end{array}$$

con $\lim_{t \rightarrow p} \phi(t) = x_0$ e t.c. ϕ non ha accumulazioni per $\phi^{-1}(x_0)$.

$$\text{Altre } f = \phi_{x_0}(g) \Rightarrow f \circ \phi = \phi_p(g \circ \phi), \text{ e}$$

$$f \sim_{x_0} g \Rightarrow f \circ \phi \sim_p g \circ \phi$$

(ii) (Rapporti "Circospetti" con la composizione $A \ni x$)

$$\text{Se } \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & g & \\ & & \mathbb{R} \end{array} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R} \quad \text{con } \phi \text{ continue all'int. di } x_0:$$

alle se $f = \phi_{x_0}(g)$ non è detto che $\phi \circ f = \phi_{x_0}(\phi \circ g)$, e
idem per l'asintotici. Tuttavia

(a) se f, g sono positive e non nulle all'int. di x_0 (eccetto x_0)
altr $f \sim_{x_0} g \Rightarrow f^a \sim_{x_0} g^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(b) se $f-g$ è infinitesima, altr $f \sim_{x_0} g \Rightarrow e^f \sim_{x_0} e^g$.

(c) se f, g non sono positive e non nulle all'int. di x_0 (eccetto x_0)
e se $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 1$, altr $f \sim_{x_0} g \Rightarrow \log f \sim_{x_0} \log g$.

$$\text{Es. } \log(x^2-x) \sim_{+\infty} \log(x^2) = 2 \log x \sim_{+\infty}^* \log x$$

Dim. (i) Se $f = \phi_{x_0}(g)$, ovv $f(x) = \phi(x)g(x)$ con $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = 0$.

$$\Rightarrow f(\phi(t)) = \phi(\phi(t))g(\phi(t)) \quad \text{ovv}$$

$$(f \circ \phi)(t) = (\phi \circ \phi)(t) \cdot (g \circ \phi)(t).$$

Ci basta mostrare che $\phi \circ \phi$ è infinitesima in $t = p$,

ovv che $\lim_{t \rightarrow p} \phi(\phi(t)) = 0$ ma ciò è vero per il

tenere del limite delle espressioni (v.)
 Per l'asintotico, idem.

(ii) se $f \sim_{x_0} g$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Ma anche,
 dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^\alpha = 1^\alpha = 1$.
(per α e' continue)

Vediamo invece per $q = \exp$, supponiamo che $f \sim_{x_0} g$.

$\begin{cases} f \sim_{x_0} g \\ f-g = o_{x_0}(1) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{f(x)-g(x)} = 1$
(due due infinite)

Ma ad es. $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 + x$ son asintotici
 in $+\infty$, ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \neq 1$.

Vediamo per $\log$, supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 1$.

Allora, essendo $f \sim_{x_0} g$ ho che $f = (1+o)g \Rightarrow$
 $\log f = \log(1+o) + \log g$, dove vale da capire se
 $\log(1+o) = o_{x_0}(\log g)$ ma cio' e' vero, perche'
 $\log(1+o)$ e' un infinitesimo (perche' $o \rightarrow 0$)
 mentre $\log g$ NON lo e' (perche' $g \not\rightarrow 1$).

Ma ad es. in $x_0 = 0$, $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{x^2}$ son
 asintotici, ma $\log f(x) = x$ e $\log g(x) = x^2$ Non son
 asintotici tra loro (in questo caso $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x^2} = 1$).

Ex. (dx) $\sin(\log x) \sim_1 \log x \sim_1 x-1$ (nella Proposizione anzi detto $\sin(\log t) \sim_1 \log t$)
(infinitesimo con potenze di x)

$1 - \cos(\log x) \sim_1 \frac{1}{2} \log^2 x$ (perche' $1 - \cos t \sim_0 \frac{t^2}{2}$)
(infinitesimo)

$e^{x-x^2} - 1 \sim_0 x-x^2 \sim_0 x$; $e^{x-x^2} - 1 \sim_1 x-x^2 \sim_1 -(x-1)$
($x^2-x-1 \sim_{x \rightarrow \infty} x$ e non tende a 1)

(sx) $\log(x^2+x-1) \sim_{+\infty} \log(x^2) = 2 \log x \sim_{+\infty} \log x$
($(x^2+x-1)-x^2$ e' infinitesimo)

$e^{x-x^2} \sim_0 e^x \sim_0 1$

$\log x \sim_1 (x-1)^{\frac{1}{x}}$

Il gran vantaggio delle nozioni di limitatezza e asintotiche nel calcolo dei limiti è riassunto nelle seguenti

- Prop.
- (1) (SOSTITUZIONE DI UN FATTORE CON UNA FUNZIONE ASINTOTICA).
 Se $g \sim_{x_0} \tilde{g}$, allora, se esistono,
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\tilde{g}(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\tilde{g}(x)}$
- (2) (ELIMINAZIONE DEGLI ADDENDI TRASCURABILI)
 Se $h = o_{x_0}(f)$, $l = o_{x_0}(g)$, allora, se esistono,
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)+h(x)}{g(x)+l(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

- Dim. (1) Se $\tilde{g} = (1+\varepsilon)g$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\tilde{g}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)(1+\varepsilon(x))$
 ma, poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} (1+\varepsilon(x)) = 1$, il lim. a sinistra esiste se e solo se
 esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$. Idem per il quoziente.
- (2) $h = \varepsilon f$, $l = \tau g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f+h}{g+l} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1+\varepsilon)f}{(1+\tau)g} \dots$

Ex. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x-3x^2+x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$
 $3x \sim \sin 3x$
 $-3x^2+x^3 = o(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - e^{x/2} + \arctan x}{e^{ax} - 2x^3} \quad (a \in \mathbb{R})$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{x/2}}{e^{ax} - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{x/2}}{e^{ax}}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{x/2}}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{(1/2-a)x}) = \begin{cases} -\infty & \text{se } 1/2 - a > 0 \\ -1 & \text{se } 1/2 - a = 0 \\ 0^- & \text{se } 1/2 - a < 0 \end{cases}$
 $x^3 + \arctan x = o(e^{x/2})$
 $x^3 = t \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{16t^3} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x + 3x^2}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{?}{x^a}$
 $(a \in \mathbb{R})$

Il problema è che al numeratore non si copre il termine (PARTE PRINCIPALE) che prevale rispetto a tutti gli altri: servirebbe una conoscenza più approfondita del comportamento delle funzioni $\sin x$ in $x \sim 0$ (Sviluppo Asintotico), che tratteremo nella prossima lezione.

In effetti, io so che $\sin x \sim_0 x \Rightarrow \sin x = x + \theta_0(x)$

$$\text{dopo } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - (x + \theta_0(x)) + 3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\theta_0(x) + 3x^2}{x^2}$$

TRA $\theta_0(x)$ E $3x^2$ NON SI SA CHI PREVALE!

Se invece fosse stato " $x + \sin x$ " anziché " $x - \sin x$ ", avremmo potuto concludere:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin x + 3x^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \theta_0(x) + 3x^2}{x^2} \quad \theta_0(x) = \theta_0(2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^{1-a} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-a > 0 \quad (a < 1) \\ 2 & \text{se } 1-a = 0 \quad (a = 1) \\ +\infty & \text{se } 1-a < 0 \quad (a > 1) \end{cases} \end{aligned}$$

La SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
PROPOSTI PER CASA MARTEDÌ 28/10

ESERCIZI PER LA CASA. Calcolare i seguenti limiti (eventualmente al variare di $a \in \mathbb{R}$)

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\lg |a-5x|}$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3x - \cos x}{4e^x + e^{-x}}$ (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a - 1}{\lg x}$
- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{3x^m + 1}$ (ove $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$) (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1-3x^2} - 1}{|x|^a}$ (6) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\lg(2x-5)}{(x-3)^a}$
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{(e^x - a)^2}$ (8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1+x)}{x}$ (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \lg x - 1}{3 \lg x + 2 \sin x}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x - x^3}{3x^a + x^3}$ (11) $\lim_{x \rightarrow 0^+, +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5 \sin x}{x^a}$ (12) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+3} - 1}{\lg(3x+4)}$
- (13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x^3}{\lg(3x+1)}$ (14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \sqrt{x} - 1}{\lg 2(x-1)}$ (15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lg(3-x) + 1}{|x-1|^a}$
- (16) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^a + 2x + 5e^x)$ (17) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2x)}{1 + \sin 3x}$ (18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctan x + 3e^{-x})$
- (19) $\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}}$ (20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{\sin x}}{\lg^2(1+2x)}$ (21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{2x^3 + 5x^2 + 3}$
- (22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 7 + e^{\frac{1}{x}}) \sin \frac{3}{x}$ (23) $\lim_{x \rightarrow 1} (\lg^2 |1-x| + 5x)$ (24) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos^2(2x)}{\lg x}$
- (25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\pi + 2 \arctan x)$
(porre $x = \frac{1}{t}$, poi...)

Nelle soluzioni dei limiti useremo le relative simboliche.

Es. Scrivendo $\frac{-1}{+\infty} = 0^-$ si intende dire che "il quoziente tra una funzione che tende a -1 e una che tende a $+\infty$ tende a 0^- ".

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\lg |a-5x|}$. Se $a \neq \pm 1$ il lim = $\frac{0}{\text{finito}} = 0$
 Se $a = 1$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\lg(1-5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{-5x} \cdot \frac{-5x}{\lg(1+(-5x))} = -\frac{3}{5}$
 Se $a = -1$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\lg(1+5x)} = \frac{3}{5}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3x - \cos x}{4e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (1 - \frac{3x}{e^x} - \frac{\cos x}{e^x})}{e^x (4 - e^{-2x})} = \frac{1}{4}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a - 1}{\log x}$: se $a < 0$ il limite vale $\frac{0-1}{+\infty} = 0^-$
 se $a = 0$ la funzione è nulla.
 se $a > 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{\log x} (1 - x^{-a}) = +\infty \cdot 1 = +\infty$

(4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x + 5}{3x^n + 1}$ (con $n \in \mathbb{Z}$). Se $n < 0$ il lim. vale $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$.
 Se $n = 0$ la funz. ha 4 al denom. e tende ancora a $-\infty$.
 Se infine $n \in \mathbb{N}$ si ha forme indif. $\frac{\infty}{\infty}$: si calcola x^3 sopra e x^n sotto si ha
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2/x + 1/x^2 + 5/x^3}{3 + x^{-n}} \cdot x^{3-n}$, che tende a $\frac{1}{3}$ se $3-n=0$, ovvero $n=3$
 0 se $3-n < 0$, ovvero $n > 3$

(5) La funzione è pari, dunque il limite in 0 è uguale al limite in 0^+ :
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[5]{1-3x^2} - 1}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-3x^2)^{1/5} - 1}{-3x^2} \cdot (-3x^{2-a}) = \begin{cases} 0^- & \text{se } 2-a > 0, \text{ ovvero } a < 2; \\ -3/5 & \text{se } 2-a=0, \text{ ovvero } a=2; \\ -\infty & \text{se } 2-a < 0, \text{ ovvero } a > 2. \end{cases}$

(6) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\log(2x-5)}{(x-3)^a} = \left[\begin{array}{l} \text{posto } x=3+t \\ \text{anzi } x=3+t \end{array} \right] \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+2t)}{t^a} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+2t)}{2t} \cdot 2t^{1-a} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } a < 1 \\ -2 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{(e^x - 2)^2}$, se $a \neq 1$ il lim vale $\frac{0^-}{\text{finito pos.}} = 0^-$.
 Se invece $a=1$ vale $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \cdot \frac{(3x)^2}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)^2 \right) = -9/4$.

(8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{x}$ [occhio: si è in 0^+ , non in 0^- !] = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = 0^+$.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \log x - 1}{3 \log x + 2 \sin x}$ [comanda il log sopra e sotto] = $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x (\frac{x}{\log x} + 1 - \frac{1}{\log x})}{\log x (3 + 2 \frac{\sin x}{\log x})} = \frac{1}{3}$.

(10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x - x^3}{3x^a + x^3}$, se $a < 3$: $\lim = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(-1 - 2/x + 5/x^2)}{x^3(1 + 3x^{a-3})} = -1$.
 Se $a=3$: $\lim = -\frac{1}{4}$, se $a > 3$: sotto scala x^a , e $\lim = 0$.

(11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x + 5 \sin x}{x^a}$ = [scala sopra] $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + 5 \frac{\sin x}{x} \right) x^{1-a} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } a < 1 \\ -3 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5 \sin x}{x^a}$ = [scala sopra] $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5 \sin x}{x^2} \right) x^{2-a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 2 \\ 1 & \text{se } a=2 \\ 0^+ & \text{se } a > 2 \end{cases}$

(12) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+3} - 1}{\log(3x+4)}$ = [posto $x=-1+t$] $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2t} - 1}{\log(1+3t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2t} - 1}{2t} \cdot \frac{2t}{3t} \cdot \frac{3t}{\log(1+3t)} = \frac{2}{3}$

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x^3}{\ln(3x+1)} = \left[\begin{smallmatrix} \text{recipro} \\ x \rightarrow 0^+ \end{smallmatrix} \right] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + 2x^2}{\frac{3x}{\ln(1+3x)}} = 1/3.$

(14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \sqrt{x} - 1}{\ln(2x-1)} \left[\begin{smallmatrix} \text{sic } x=1+t \\ \text{cin } t=x-1 \end{smallmatrix} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{5/2} - 1}{\ln(2t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{5/2} - 1}{t} \cdot \frac{2t}{\ln(2t)} \cdot \frac{\ln(2t)}{2} = 5/4.$

(15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(3-x)+1}{|x-1|^a}$: se $a \leq 0$ il lim vale $\frac{+\infty+1}{0^+ \text{ oppure } 1} = +\infty$.
 Se invece $a > 0$ è f.i. ∞ : porò $3-x=t$ dove $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t + 1}{(t-2)^a}$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^a} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-2}\right) \cdot \left(\frac{t}{t-2}\right)^a = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0^+.$

(16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^a + 2x + 5e^x)$: se $a < 0$ si ha che x^a tende a $+\infty$, dunque $\lim = +\infty$.
 se $a = 0$ si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x + 5e^x) = 6$. Infine, se $a > 0$, $x^a \rightarrow 0$ dunque $\lim = 5$.

(17) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(2x)}{1 + \sin 3x}$. Il denom. tende a 0^+ , mentre il num. tende a 0
 solo quando 2 è un intero dispari.
 Pertanto se $2 \notin 2\mathbb{Z}+1$ (cioè se 2 non è un intero dispari) il
 limite vale ∞ , ed esso dipende dal segno di $\cos(\frac{2x}{2})$
 (notare che il denom. è > 0): ad esempio se $2 = \sqrt{3}$ si ha
 $\frac{2\pi}{2} \sim 2,72$ radianti, dove $\cos(\frac{\pi\sqrt{3}}{2}) < 0$ e allora $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(\sqrt{3}x)}{1 + \sin 3x} = -\infty$.
 Supponiamo ora invece che 2 sia un intero dispari (cioè $\dots, -5, -3, -1, 1, 3, \dots$),
 diciamo sia $2 = 2m+1$ per un certo $m \in \mathbb{Z}$. Poiché siamo in una
 f.i. $0/0$, ancora conviene variare la variabile per ripassare in 0 . Ponendo $t = x - \frac{\pi}{2}$
 si ha $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos((2m+1)(t + \frac{\pi}{2}))}{1 + \sin(3t + \frac{3\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos((2m+1)t + m\pi + \frac{\pi}{2})}{1 - \cos 3t} = \frac{\cos(\beta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \beta}{1 - \cos 3t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin((2m+1)t + m\pi)}{1 - \cos 3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin((2m+1)t)}{1 - \cos 3t}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} (-1)^{m-1} \cdot \frac{\sin((2m+1)t)}{(2m+1)t} \cdot \frac{(2m+1)t}{(3t)^2} \cdot \frac{(3t)^2}{1 - \cos 3t} = \infty$ (ed esso dipende dal segno di $(-1)^{m-1}$ dal segno di $2m+1$ e dal verso in cui $t \rightarrow 0^+$)

(18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctan x + 3e^{-x}) = +\infty \cdot (\frac{\pi}{2} + 0) = +\infty.$

(19) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{1/x} = 0^- \cdot 0^+ = 0^-$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \left[\begin{smallmatrix} \text{porò} \\ t = 1/x \end{smallmatrix} \right] \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty.$

(20) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$ $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{\sin x}}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{(2x)^2} \cdot \left(\frac{2x}{\ln(1+2x)} \right)^2 = \mp \infty$

(21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{2x^3 + 5x^2 + 3}$: se $a \leq 0$ il lim vale $\frac{0^+ \text{ oppure } 1}{+\infty} = 0^+.$
 Se invece $a > 0$, ragghiamo x^3 intò si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^a)^x}{x^3} \cdot \frac{1}{2 + 5/x + 3/x^2} = +\infty.$

(22) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+7+e^{1/x}) \sin \frac{3}{x}$. E' una f.i. $\infty \cdot 0$: conviene cambiare variabile. Poniamo $t = 1/x$: si ha anche $\lim_{t \rightarrow 0^+} (7+e^{-t}-\frac{2}{t}) \sin(-3t)$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} (\frac{2}{t} - 7 - e^{-t}) \sin 3t = \lim_{t \rightarrow 0} 3 \cdot (2 - 7t - te^{-t}) \cdot \frac{\sin 3t}{3t} = 6$.

(23) $\lim_{x \rightarrow 1} (\log^2 |1-x| + 5x) = (-\infty)^2 + 5 = +\infty$

(24) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cos^2(2x)}{\log x}$. Il denom. tende a 0^+ , mentre il num. e' infinitesimo solo quando x e' un multiplo intero dispari di $\pi/2$ (ovvero $x = \dots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots$).
 Dunque se x non e' un tale multiplo il limite vale $\frac{\cos^2(x)}{0^+} = \mp \infty$.
 Esaminiamo ora il caso in cui x sia proprio un multiplo intero dispari di $\pi/2$, diciamo $x = (2m+1)\pi/2$ per un certo $m \in \mathbb{Z}$. Posto $t = x-1$ si ha anche $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2((2m+1)\pi/2(1+t))}{\log(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2(\frac{(2m+1)\pi}{2}t + m\pi + \frac{\pi}{2})}{\log(1+t)}$
 $\stackrel{\text{as}(\frac{\pi}{2}) = -\sin \pi}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(\frac{(2m+1)\pi}{2}t + m\pi)}{\log(1+t)} \stackrel{\text{si}(\frac{\pi}{2} + m\pi) = (-1)^m \sin \pi}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(\frac{(2m+1)\pi}{2}t)}{\log(1+t)}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(\frac{(2m+1)\pi}{2}t)}{\frac{(2m+1)\pi}{2}t} \right)^2 \cdot \frac{(\frac{(2m+1)\pi}{2}t)^2}{t} \cdot \frac{t}{\log(1+t)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 0^+.$

(25) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi + 2 \arctan x)$ e' in f.i. $\infty \cdot 0$.
 Posto $x = \phi(t) = \tan t$ (notare che $\phi:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ e' biettivo)
 si ha $\lim_{t \rightarrow -\pi/2} (\pi + 2t) \tan t$. Posto ancora $u = t + \pi/2$ (anzi $t = u - \pi/2$) si ha
 $\lim_{u \rightarrow 0} (\pi + 2u - \pi) \cdot \tan(u - \pi/2) = \lim_{u \rightarrow 0} 2u \cdot (-\cot u) = \lim_{u \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{u}{\sin u} \cdot (-\cos u) = -2$.