ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di martedì 04/11/2014

PARTE PRINCIPALE E SVILUPPI ASINTOTICI

$\boxed{\text{SCOPO}}$ Data una funzione $f(x)$ e un punto $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per il dominio di f, mettere in evidenza una funzione più semplice $g(x)$ tale che $f(x) \sim_{x_0} g(x)$.

(se possibile!) (se $x_0 = \pm\infty$ intenderò αx^m per qualche α e m).

Ideale: $g(x)$ di tipo monomiale $\alpha (x-x_0)^m$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{Z}$.
Diremo che $\alpha (x-x_0)^m$ è la PARTE PRINCIPALE di f in x_0 (per la scala delle potenze intere)

Sarà dunque
$$\boxed{f(x) = \alpha (x-x_0)^m + o_{x_0}\left((x-x_0)^m\right)}.$$

Ex.
- In $x \sim 0$: $\sin 2x \sim_0 2x$;
- In $x \sim 1$: $\dfrac{3}{\log x} \sim_1 \dfrac{3}{x-1} = 3(x-1)^{-1}$
- In $x \sim +\infty$: $\dfrac{2x-1}{x^3-5x} \sim_{+\infty} \dfrac{2x}{x^3} = 2x^{-2}$

  In $x \sim 0$: $\dfrac{2x-1}{x^3-5x} \sim_0 \dfrac{-1}{-5x} = \dfrac{1}{5}x^{-1}$
- In $x \sim -\infty$: $\sqrt{4x^2-1} = \overset{2|x|}{-2x}\sqrt{1-\dfrac{1}{4x^2}} \sim_{-\infty} -2x$

  In $x \sim 1$: $\sqrt{4x^2-1} \sim_1 \sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot(x-1)^0$

Calcolata (in qualche modo, tra poco diremo di più) la parte principale di f in x_0, mi preoccupo di <u>stimare l'errore</u> tra $f(x)$ e la sua parte principale, e lo faccio <u>calcolando la parte principale dell'errore $f(x) - \alpha(x-x_0)^m$</u> :

$$f(x) - \alpha(x-x_0)^m = \beta(x-x_0)^n + \theta_{x_0}\left((x-x_0)^n\right), \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{f(x) = \alpha(x-x_0)^m + \beta(x-x_0)^m + \theta_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)}$$

Il procedimento si può continuare, cercando la parte principale dell'errore residuo $f(x) - \alpha(x-x_0)^m - \beta(x-x_0)^m$, e così via: in questo modo si trova lo <u>SVILUPPO ASINTOTICO</u> di $f(x)$ in x_0 (rispetto alla scala delle potenze intere), dove ogni termine è trascurabile rispetto ai precedenti:

$$\boxed{f(x) = \alpha_1(x-x_0)^{m_1} + \alpha_2(x-x_0)^{m_2} + \dots + \alpha_K(x-x_0)^{m_K} + \theta_{x_0}\left((x-x_0)^{m_K}\right)}$$

La seguente tabella di sviluppi asintotici in <u>$x_0 = 0$</u> verrà usata correntemente (e verrà dimostrata quando si parlerà della "formula di Taylor con resto di Peano"):

TABELLA DEI PIÙ IMPORTANTI SVILUPPI ASINTOTICI IN $x_0 = 0$

$$e^x = \overset{1\cdot x^0}{1} + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \theta_0(x^n).$$

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + \theta_0(x^n).$$

$=\binom{\alpha}{n}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \theta_0(x^n).$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \theta_0(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \theta_0(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \theta_0(x^6)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \theta_0(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad \text{(come il coseno, ma tutti +)}$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad \text{(come il seno, ma tutti +)}$$

Con l'ausilio di questa tavola possiamo:

- Calcolare parti principali e sviluppi asintotici di funzioni anche più complicate, e anche in punti diversi da $x_0 = 0$ (vedi più sotto);
- Usare questa conoscenza di per sé, o per ottenere altri scopi (esempio: calcolo dei limiti in forme indeterminate)

$\boxed{\text{Ex.}}$ Risolviamo finalmente $\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sin x+3x^2}{x^a}$ al variare di $a\in\mathbb{R}$,

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}-\left(\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)+3x^2}{x^a} \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{x^3}{6}+o(x^4)=o(3x^2)}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{3x^2}{x^a} = \lim_{x\to0^+}3x^{2-a} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } 2-a>0 \ (a<2) \\ 3 & \text{se } 2-a=0 \ (a=2) \\ +\infty & \text{se } 2-a<0 \ (a>2) \end{cases}$$

(Alla fine, dunque, la parte principale in $x\sim0$ del numeratore era $3x^2$, ovvero il termine che dei tre sembrava il più debole.)

Alcune osservazioni a margine.

(1) Si può sostituire un fattore con un asintotico, NON un addendo con un asintotico! In part., non posso sostituire "tout-court" $\sin x$ con x.

Perciò $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x+3x^2}{x^a} \overset{\text{No!}}{\neq} \lim_{x\to0}\frac{x-x+3x^2}{x^a} = \dots$

Quello che va fatto è sostituire $\sin x$ con un suo sviluppo asintotico con resto indicato: ad es. sostituire con $x+o(x)$ o $x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

(2) A questo punto si pone la questione: QUANTO LUNGO DEVE ESSERE LO SVILUPPO?
Risposta è: ABBASTANZA AFFINCHÉ SPUNTI IN MODO CHIARO LA PARTE PRINCIPALE.

Se mi accontentassi di scrivere $\sin x = x+o(x)$, otterrei

$x-\sin x+3x^2 = x-(x+o(x))+3x^2 = o(x)+3x^2 = o(x)$ così?!? deve essere più preciso

Invece, scrivendo $\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ ottengo

$x-\sin x+3x^2 = x-\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)+3x^2 = 3x^2\underbrace{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}_{o(x^2)} \Rightarrow p.p.=3x^2.$

(3) Un limite NON si FA A PEZZI!

Es: $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x+3x^2}{x^a} = \lim_{x\to0}\frac{x\left(1-\overset{\to1}{\frac{\sin x}{x}}+3x\right)}{x^a} \overset{\text{No!}}{\neq} \lim_{x\to0}\frac{x(1-1+3x)}{x^a}$

Facciamo ora alcune importanti osservazioni, già anticipate prima.

- Anche se gli sviluppi delle Tabella sono forniti in $x_0=0$, essi possono tornare utili anche per sviluppi:
  - in altri $x_0 \in \mathbb{R}$: basta porre $t = x - x_0$, sviluppare $f(x) = f(x_0+t)$ in $t \sim 0$ e poi risostituire $t = x - x_0$;
  - in $x_0 = \pm\infty$ (se $x \sim \pm\infty$, allora $t = 1/x \sim 0$ ...)
  - con altri infinitesimi (sfruttando la compatibilità con la composiz. dx): ad esempio, se $h(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$ allora posto $t = h(x)$

    $\cos(h(x)) = \cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^3) = 1 - \frac{1}{2}h(x)^2 + o_0(h(x)^3)$,

    e se si conosce lo sviluppo di $h(x)$ in x_0 si può continuare.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Determinare la parte principale delle sgg. funzioni nel punto indicato, trovando eventualmente anche uno o due ulteriori termini dello sviluppo:

- $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$. $t = x-1$ $x = 1+t$

$$\lg x = f(x) = f(1+t) = \lg(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{t^3}{3} + o_0(t^3)$$
$$= \underbrace{(x-1)}_{\text{p.p.}} - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + o_0((x-1)^3)$$

• $f(x) = \sqrt{4x^2+1}$, $x_0 = 0$ oppure $x_0 = 1$ oppure $x_0 = +\infty$.

In $\underline{x_0=0}$: $f(x) = (1+\underbrace{4x^2}_{t\to 0})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}t^2 + o_0(t^2)$ $\quad (1+t)^\alpha = 1+\alpha t + \dots$

$$= 1 + \frac{1}{2}(4x^2) - \frac{1}{8}(4x^2)^2 + o_0(x^4) = \underbrace{1}_{p.p.} + 2x^2 - 2x^4 + o_0(x^5)$$

In $\underline{x_0=+\infty}$: $f(x) = 2x\sqrt{1+\underbrace{1/4x^2}_{t\to 0}} = 2x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4x^2}\right)^2 + o_{+\infty}(x^{-5})\right)$

$$= \underbrace{2x}_{p.p.} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{64x^3} + o_{+\infty}(x^{-4})$$

In $\underline{x_0=1}$: $\quad t = x-1 \quad x = 1+t$

$$f(x) = \sqrt{4(1+t)^2+1} = \sqrt{5+4(2t+t^2)} = \sqrt{5}\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{4}{5}(2t+t^2)}_{u\to 0}}$$

$$= \sqrt{5}\left(1+\frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) = \sqrt{5}\left(1+\frac{2}{5}(2t+t^2) - \frac{2}{25}(2t+t^2)^2 + \underbrace{o_0(t^2)}_{u\sim t}\right) = \sqrt{5}\left(1+\frac{4}{5}t + \left(\frac{2}{5}-\frac{8}{25}\right)t^2 + o_0(t^2)\right)$$

e rimetto $t = x-1$.

• $f(x) = \operatorname{arctg}(3x)$, $x_0 = 0$ oppure $x_0 = +\infty$.

In $\underline{x_0=0}$: $f(x) = \operatorname{arctg}(\underbrace{3x}_{t\to 0}) = (3x) - \frac{1}{3}(3x)^3 + \frac{1}{5}(3x)^5 + o_0(x^6)$

$$= \underbrace{3x}_{p.p.} - 9x^3 + \frac{243}{5}x^5 + o_0(x^6)$$

In $\underline{x_0=+\infty}$ per $u>0$ c'è l'identità $\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg}\frac{1}{u} \equiv \pi/2 \quad \forall u>0$

dunque $\operatorname{arctg} 3x = \pi/2 - \operatorname{arctg}\left(\underbrace{\tfrac{1}{3x}}_{t\to 0}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\left(\frac{1}{3x}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3x}\right)^5 + o_{+\infty}(x^{-6})\right) = \underbrace{\pi/2}_{p.p.} - \frac{1}{3}x^{-1} + \frac{1}{81}x^{-3} - \frac{1}{1215}x^{-5} + o_{+\infty}(x^{-6})$

• $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$, $x_0 = 0$ $\quad \cos x - 1 \overset{*}{\sim}_0 x^2$

$f(x) = \sqrt[3]{1+\underbrace{(\cos x - 1)}_{t\to 0}} = 1 + \frac{1}{3}(\cos x - 1) - \frac{1}{9}(\cos x - 1)^2 + o_0(x^4)$ $\quad$ posso scendere!

$$= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o_0(x^5)\right)^2 + o_0(x^5)$$

$$= 1 - \frac{1}{6}x^2 + x^4\left(\frac{1}{72} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\right) + o_0(x^5) = \underbrace{1}_{p.p.} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{72}x^4 + o_0(x^5)$$

- $f(x) = \sin(e^{2x}-1)$, $x_0 = 0$.

$$f(x) = \sin(\underbrace{e^{2x}-1}_{t\to 0}) = (e^{2x}-1) - \frac{1}{6}(e^{\overset{u\to 0}{2x}}-1)^3 + \frac{1}{120}(e^{2x}-1)^5 + \theta_0(x^{\cancel{5}\,6})$$

$$= \left((2x)+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{6}(2x)^3+\theta(x^3)\right) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + \frac{1}{120}(\cdots)^5 + \theta_0(x^{\cancel{5}\,6})$$

$$= \underbrace{2x}_{p.p.} + 2x^2 + \cancel{\left(\frac{8}{6}-\frac{8}{6}\right)x^3} + \theta_0(x^3) = 2x + 2x^2 + \theta_0(x^3)$$

- $f(x) = e^{2\sin x}$, $x_0 = \pi$.

$x = \pi + t \qquad f(x) = f(\pi+t) = e^{2\sin(\pi+t)} = e^{\overset{u\to 0}{-2\sin t}}$ $\quad t - t^3/6 + \cdots \quad (t-t^3/6+\cdot)^2 \quad (t-t^3/6+\cdot)^3$

$$= 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \theta_0(u^3) = 1 - 2\sin t + 2\sin^2 t - \frac{4}{3}\sin^3 t$$

$$+ \theta_0(t^3) = 1 - 2t + 2t^2 + t^3\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\cdot 1\right) + \theta_0(t^3)$$

e poi sostituisci $t = x - \pi$:

$$e^{2\sin x} = \underbrace{1}_{p.p.} - 2(x-\pi) + 2(x-\pi)^2 - (x-\pi)^3 + \theta_\pi\left((x-\pi)^3\right).$$

- Una parte principale (e uno sviluppo asintotico) nella scala delle potenze intere POTREBBE NON ESISTERE: in tal caso si può ricorrere a scale di confronto più raffinate, come ad esempio per 0^+ e per $+\infty$:
  - la scala delle potenze reali x^r con $r \in \mathbb{R}$, per 0^+ e per $+\infty$;
  - la scala potenze - exp - log $x^r e^{sx} \log^u x$ con $r, s, u \in \mathbb{R}$, per $\pm\infty$;
  - le scale potenze - exp - log $x^r e^{-1/x^s} |\log x|^u$ con $r, u \in \mathbb{R}$ e $s > 0$, per 0^+.

$\boxed{\text{Ex.}}$

- $\sqrt{x} = x^{1/2}$ in $0^+, +\infty$ Parte principale: $x^{1/2}$ (lei stessa)
- e^x in $0, 1, +\infty, -\infty$. P.p.: $\underline{x \sim 0}$: 1. $\underline{x \sim 1}$: e
  $\underline{x \sim +\infty}$: e^x. $\underline{x \sim -\infty}$: e^{-x}
- $\log x$ in $0^+, 1, +\infty$ P.p.: $\underline{x \sim 0}$: $\log x$; $\underline{x \sim 1}$: $x-1$
  $\underline{x \sim +\infty}$: $\log x$
- $e^{-1/x}$ in $0^+, +\infty$. P.p.: $\underline{x \sim 0}$: $e^{-1/x}$; $\underline{x \sim +\infty}$: 1

$\boxed{\text{Ex.}}$ Troviamo le p.p. delle segg. funzioni in $0^+, 1, +\infty$.

- $f(x) = \sin 3x$. $\underline{x \sim 0}$: $3x$. $\underline{x \sim 1}$: $\sin 3$. $\underline{x \sim +\infty}$ $\nexists$ ($\nexists$ lim)
- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$. $\underline{x \sim 0}$: $f(x) \sim_0 \dfrac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}x^{-1}$. $\underline{x \sim 1}$: $f(x) = \underbrace{\dfrac{x+1}{2x}}_{\to 1}(x-1) \sim_1 1 \cdot (x-1)$
  $\underline{x \sim +\infty}$: $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \frac{1}{2}x$
- $f(x) = e^x$. fatto prima!
- $f(x) = e^x - 1$. $\underline{x \sim 0}$: $f(x) \sim_0 x$. $\underline{x \sim 1}$: $e-1$. $\underline{x \sim +\infty}$: e^x (infinito di ordine alto!)
- $f(x) = e^{-x}$. $\underline{x \sim 0}$: 1. $\underline{x \sim 1}$: $1/e$. $\underline{x \sim +\infty}$: e^{-x} (infinitesimi di ordine molto alto!)
- $f(x) = \log(4x^2+1)$. $\underline{x \sim 0}$: $4x^2$, $\underline{x \sim 1}$: $\log 5$. $\underline{x \sim +\infty}$: $4x^2+1 \sim_{+\infty} 4x^2$,
  e $\not\to 1 \Rightarrow f(x) = \log(4x^2+1) \sim_{+\infty} \log(4x^2) = \log 4 + \log(x^2) \sim_{+\infty} \log(x^2)$
  $= 2\log x$.
- $f(x) = \sqrt{x}$. $\underline{x \sim 0}$: $x^{1/2}$. $\underline{x \sim 1}$: 1. $\underline{x \sim +\infty}$: $x^{1/2}$.
- $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. $\underline{x \sim 0}$: 1. $\underline{x \sim 1}$: $\sqrt{2}$. $\underline{x \sim +\infty}$: $f(x) \sim_{+\infty} \sqrt{x^2} = x$

$\cdot\ f(x) = \log\left(1 - \frac{x-1}{x^2}\right)$. $\quad \underline{x \sim 0^+}$: $1 - \frac{x-1}{x^2} \sim_{0^+} -\frac{x-1}{x^2} = \frac{1-x}{x^2} \sim_{0^+} \frac{1}{x^2} \ (\not\to 1)$

perciò $f(x) = \log\left(1 - \frac{x-1}{x^2}\right) \sim_{0^+} \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = -2\log|x|$

$\underline{x \sim 1}$: $\log\left(1 - \frac{x-1}{x^2}\right) = \log\left(1 + \left(\frac{1-x}{x^2}\right)\right) \underset{t \to 0}{\sim} t = \frac{1-x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}(x-1) \sim_1 -(x-1)$

$\underline{x \sim +\infty}$ $\log\left(1 - \frac{x-1}{x^2}\right) = \log\left(1 + \underbrace{\frac{1-x}{x^2}}_{u \to 0}\right) \underset{u \to 0}{\sim} u = \frac{1-x}{x^2} \sim_{+\infty} \frac{-x}{x^2} = -\frac{1}{x}$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Sviluppare $\sin(\log x)$ in $x = 1$ fino al $\underline{\text{III}}$° ordine.

$$\sin(\underbrace{\log x}_{t \to 0}) = \log x - \frac{1}{6}\log^3 x + \frac{1}{120}\log^5 x + \underbrace{o_1(\log^6 x)}_{= o_1((x-1)^6)} \qquad [\text{pongo } u = x-1,\ x = 1+u]$$

$$= \log(1+u) - \frac{1}{6}\log^3(1+u) + \frac{1}{120}\log^5(1+u) + o_0(u^6)$$

$$= \left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o_0(u^3)\right) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + \frac{1}{120}(\cdots)^5 + o_0(u^6)$$

$$= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o_0(u^3) - \frac{1}{6}\left(u^3 + o_0(u^3)\right) + o_0(u^3) + o_0(u^3)$$

$$= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o_0(u^3) \ : \text{ dunque, risostituendo } u = x-1,$$

$$\sin(\log x) = \underbrace{(x-1)}_{\text{p.p.}} - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3).$$

ESERCIZI PER CASA. I seguenti esercizi (su calcolo di parti principali, sviluppi asintotici e limiti con metodi di confronto locale) verranno in parte svolti durante la prossima lezione; tuttavia, quanto visto nella lezione odierna dovrebbe permettere agli studenti di affrontarne da soli la risoluzione senza ricorrere alle soluzioni dettagliate che saranno comunque fornite presto (cosa caldamente consigliata); comunque qui nel seguito daremo vari suggerimenti (dove non ci sono vuol dire che non pensiamo servano aiuti...)

- Determinare lo sviluppo asintotico al secondo ordine (cioè con due termini significativi), e in particolare la parte principale, delle sgg. funzioni nei punti indicati:

(1) $f(x) = \sin 3x$ in $x \sim 0$ e in $x \sim 1$

Per $x \sim 1$ porre $t = x-1$, usare la formula del seno della somma e lo sviluppo del seno in 0.

(2) $f(x) = \sqrt[5]{2x^2+1} - 1$ in $x \sim 0$ e $x \sim +\infty$

Per $x \sim +\infty$ far uscire $2x^2$ dalla radice, e poi notare che $\frac{1}{2x^2}$ è infinitesimo …

(3) $f(x) = \operatorname{tg} x$ in $x \sim 0$
[METODO ALTERNATIVO!]

La tg è infinitesima e dispari, dunque cerchiamo uno sviluppo del tipo $\operatorname{tg} x = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)$. Poiché $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, sarà $\sin x = (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)) \cdot \cos x$ ovvero
$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) = (ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6)) \cdot (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))$,
dunque moltiplicando a dx e confrontando i due sviluppi …

(4) $f(x) = x^3 \cos 2x$ in $x \sim 0$

(5) $f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$ in $x \sim 0$

Scrivere $f(x) = \sqrt[3]{1 + (\cos 2x - 1)}$, e $t = \cos 2x - 1$ è infinitesimo…

(6) $f(x) = \sqrt{x^4+9}$ in $x \sim 0$ e $x \sim +\infty$

Per $x \sim 0$ (risp. per $x \sim +\infty$) far uscire 9 (risp. x^4) dalla radice e notare che $x^4/9$ (risp. $9/x^4$) è infinitesimo …

(7) $f(x) = \log(2x+5)$ in $x \sim -1$ e $x \sim +\infty$

Per $x \sim -1$ porre $t = x+1$ e poi …
per $x \sim +\infty$ notare che $2x+5 \underset{+\infty}{\sim} 2x$ e …

(8) $f(x) = (1+x)\log(1+x)$ in $x \sim 0$

(9) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ in $x \sim 0$ e $x \sim +\infty$

Per $x \sim 0$ si ha $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x/2} = \frac{1}{2}(1+\frac{x}{2})^{-1}$ con $\frac{x}{2}$ infinitesimo; per $x \sim +\infty$ idem, raccogliendo $\frac{1}{x}$ anziché $\frac{1}{2}$.
In alternativa notare la somma della progressione geometrica è
$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$ valida per ogni $|q| < 1$.

(10) $f(x) = e^{\frac{\sin x}{2}}$ in $x \sim 0$ e $x \sim -\pi$

Per $x \sim -\pi$ porre $x = t + \pi$, e poi …

(11) $f(x) = \log(\sin x)$ in $x \sim 0$ e $x \sim \frac{\pi}{2}$

Per $x \sim 0$ la p.p. è $\log x$ (perché …); poi $\log(\sin x) - \log x = \log(\frac{\sin x}{x}) = \log(1 + (\frac{\sin x}{x} - 1))$ con $t = \frac{\sin x}{x} - 1$ infinitesimo … ; per $x \sim \pi/2$ si ha $f(x) = \log(1 - (\sin x - 1))$ con $\sin x - 1$ infinitesimo …

(12) $f(x) = \sqrt{x+3}$ in $x \sim 0$ e $x \sim +\infty$

Per $x \sim 0$ far uscire 3 dalla radice, poi $x/3$ è …
Per $x \sim +\infty$ far uscire x dalla radice, poi $3/x$ è …

(13) $f(x) = \log|x-1|$ in $x \sim 0$ e $x \sim 1$

Per $x \sim 0$ vale $f(x) = \log(1-x)$ dunque…
Per $x \sim 1$ porre $t = x-1$; la pp di $\log|t|$ è se stessa (nella scala con i log), dunque…

(14) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ in $x \sim -\infty$

Porre $t=-x$ (dunque $t \sim +\infty$), poi moltiplicare sopra e sotto per $t-\sqrt{t^2-1}$ ...

• (15) Determinare dominio, zeri e segno di $g(x) = \sqrt{x^2+2x} + x$; individuarne i limiti interessanti in $\tilde{\mathbb{R}}$, e calcolarli dopo aver trovato la parte principale di g in tali punti. Calcolare lo sviluppo fino al terzo ordine di g in 0. Calcolare le fibre di g nel valore generico $y \in \mathbb{R}$, e usare quanto trovato per dire se g è iniettiva/suriettiva, e per invertirla dopo averla opportunamente (co)ristretta.

Questo è anche un esercizio di ripasso sulle funzioni!

• Calcolare i seguenti limiti, eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\boxed{\text{SUGG. GLOBALE PER (16) - (30)}}$

Per la maggior parte dei valori di α questi limiti sono in forma DETERMINATA e dunque si può dare subito la risposta. Per i valori di α per cui si hanno limiti in forma indeterminata, il problema è essenzialmente di determinare le parti principali sia del num. che del denom., dopodiché sarà possibile dare la risposta. Spesso è utile fare dei cambi di variabile per portarsi in 0 e poter usare gli sviluppi asintotici noti per e^t, $\lg(1+t)$, $\sin t$, ...

(16) $\displaystyle\lim_{x\to 0,+\infty} \frac{x-\sin 2x + e^x - 1}{x^\alpha}$ (17) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+,1,+\infty} \frac{\lg x + x - 1}{x^\alpha - 1}$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to 0,+\infty} \frac{x\sqrt{1+x} - (x+2)\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^\alpha}$ (19) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[4]{x+2} - 1}{x+1}$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x\sin x) - \cosh x + 1}{\sqrt[4]{1+2x^4} - 1}$ (21) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\lg(x^2-3)}{|x-2|^\alpha}$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha \lg^3 x}{1-\cos x}$ (23) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+,\pi/4,1} \frac{e^{\alpha \sin x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}$

(24) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+,+\infty} \frac{x^2 + \alpha\cos x - 2e^{-x^3}}{x^{\alpha+1}}$ (25) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty,1^+} \sqrt{x^2-x}\, \lg^\alpha |x|$

(26) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+,1,+\infty} \frac{\alpha x + \sin x}{1+2x^\alpha - e^{x-2x^2}}$

(27) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+,1,+\infty} \frac{1+\lg x - x^\alpha}{\alpha e^{x-1} + \cos(\pi x)}$

Per i limiti

$$(28) \qquad \lim_{x\to -\infty,\,0,\,+\infty} \frac{1-\cos 2x - 2\left(e^{\alpha x}-1\right)^2}{2\left(\sqrt{1+x^4}-1\right) - \alpha \sin^3 x}$$

$$(29) \qquad \lim_{x\to 0^+,\,+\infty} \frac{2-\cos\left(\sqrt{2x}\right) - e^{\alpha x}}{x^2 - 2x^{\alpha}}$$

$$(30) \qquad \lim_{x\to 0^+,\,+\infty} \frac{x+2-e^{3\alpha x} - \sqrt{|1-4x|}}{2x^{2\alpha} - \log^2(1+x)}$$

Per i limiti (26)-(30) trattare prima il solo caso $\alpha=1$, e poi eventualmente discutere il caso generale $\alpha\in\mathbb{R}$