ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 05/11/2014

Risolviamo alcuni degli esercizi assegnati ieri.

(18) $\displaystyle\lim_{x\to 0,+\infty} \frac{x\sqrt{1+x}-(x+2)\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^\alpha}$

In $x\to 0^+$. Il limite è del tipo $\frac{0}{0^\alpha}$: dunque se $\alpha\le 0$ il limite vale 0.

Sia ora $\alpha>0$, caso in cui il lim. è in f. ind. $\frac{0}{0}$.

Troviamo le pp. pp. di num. e denom.

Num.: $x\sqrt{1+x} - x\sqrt{x} = \Theta_0(-2\sqrt{x})$, dunque p.p. è $-2\sqrt{x}$.

Denom.: $x+\sqrt{x} \sim_0 \sqrt{x} \Rightarrow (x+\sqrt{x})^\alpha \sim_0 (\sqrt{x})^\alpha = x^{\alpha/2}$.

PSPS $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+x}-(x+2)\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sqrt{x}}{x^{\alpha/2}} = \lim_{x\to 0}\left(-2x^{\frac{1-\alpha}{2}}\right)$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha>1 \\ -2 & \text{se } \alpha=1 \\ 0^- & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$$

In $x\to+\infty$. Il num. è in f.i. $\infty-\infty$: troviamo la sua p.p.

$$x\sqrt{1+x} - (x+2)\sqrt{x} = x\sqrt{x}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{t\to 0}} - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}$$

$$= x\sqrt{x}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^2} + \Theta_{+\infty}(x^{-2})\right) - \cancel{x\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{8\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + \Theta_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{8\sqrt{x}} + \Theta_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim_{+\infty} -\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Denom. $x+\sqrt{x}\sim_{+\infty} x \Rightarrow (x+\sqrt{x})^\alpha \sim_{+\infty} x^\alpha$.

PSPS $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}-\alpha}\right) = \begin{cases} 0^- & \text{se } \alpha>\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \text{se } \alpha=\frac{1}{2} \\ -\infty & \text{se } \alpha<\frac{1}{2}\end{cases}$

(24) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+,+\infty}\frac{x^2+\alpha\cos x - 2e^{-x^3}}{x^{\alpha+1}}$

$x\to 0^+$ Lim è in forma $\frac{\alpha-2}{0^{\alpha+1}}$, dunque se $\alpha\ne 2$ siamo in f. det:

- se $\alpha<-1$: $\displaystyle\frac{\overbrace{\alpha-2}^{<0}}{\underbrace{0^{\alpha+1}}_{+\infty}} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} = 0^-$

- se $\alpha=-1$: $\frac{-3}{1} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} = -3$
- se $\alpha>-1$, $\alpha\neq 2$: $-1<\alpha<2$: $\frac{\overbrace{\alpha-2}^{<0}}{0^{\alpha+1}:\,0^+} \Rightarrow \lim_{x\to0^+} = -\infty$
  $\alpha>2$: idem, ma sopra $>0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} = +\infty$

Resta il caso $\alpha=2$: $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+2\cos x-2e^{-x^3}}{x^3}$. F. ind. $0/0$.

Num. : $x^2+2\left(\cancel{1}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^5)\right)-2\left(\cancel{1}+(-x^3)+\frac{1}{2}(-x^3)^2+o_0(x^{\cancel{6}\,8})\right)$

$= \cancel{x^2}-\cancel{x^2}+\frac{1}{12}x^4+o_0(x^5)+\underbrace{2x^3}_{p.p.}-x^6+o_0(x^8) \sim_0 2x^3$

Pertanto $\lim_{x\to0} \frac{x^2+2\cos x-2e^{-x^3}}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{2x^3}{x^3} = 2$.

$\underline{x\to+\infty}$: $\text{Num} \underset{+\infty}{\sim} \overset{x^2 \text{ è l'unico infinito!}}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2\cos x-2e^{-x^3}}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^{\alpha+1}}$

$= \lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } \alpha>1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$.

(25) $\lim_{x\to-\infty,\,1^+} \sqrt{x^2-x}\,\log^\alpha|x|$

(ricordare che $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^u}{\log^v(t)}=+\infty \quad \forall u>0,\ \forall v\in\mathbb{R}$)

$\underline{x\to-\infty}$: $t=-x$: $\lim_{t\to+\infty}\underbrace{\sqrt{t^2+t}}_{\sim_{+\infty} t}\log^\alpha(t) = \lim_{t\to+\infty} t\log^\alpha(t) = +\infty \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\underline{x\to1^+}$: Se $\alpha\geq0$, $\lim_{x\to1^+} = 0$. $(0\cdot0)$ Sia dunque $\alpha<0$: f. ind. $0\cdot\infty$.

Poniamo $t=x-1$, cioè $x=1+t$: $\lim_{x\to1^+} = \lim_{t\to0^+}\sqrt{\cancel{1}+2t+t^2-\cancel{1}-t}\,\log^\alpha(1+t)$

$= \lim_{t\to0^+}\underbrace{\sqrt{t+t^2}}_{\sim_0\sqrt{t}}\,\underbrace{\log^\alpha(1+t)}_{\log(1+t)\sim_0 t} = \lim_{t\to0^+}\sqrt{t}\cdot t^\alpha = \lim_{t\to0^+} t^{\alpha+1/2} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } -1/2<\alpha<0 \\ 1 & \text{se } \alpha=-1/2 \\ +\infty & \text{se } \alpha<-1/2 \end{cases}$

(3) $f(x)=\operatorname{tg}x$ in $x\sim0$: sviluppare con tre termini significativi.
[METODO ALTERNATIVO!]

Facciamo un altro esempio che illustra lo stesso principio.

Sviluppare $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{4-x}}$ in $x\sim0^+$ con tre termini significativi.

Sperando che basti la scala delle potenze intere, e notato che $f(0) = -1/2$, sarà

$$f(x) = \overset{-1/2 = f(0)}{a} + bx + cx^2 + o_0(x^2) \quad \text{per certi } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ da determinare}$$

(in realtà già so che $a = -1/2$, ma lo ritroverò...)

$$\frac{x-1}{\sqrt{4-x}} = a + bx + cx^2 + o_0(x^2)$$

$$x - 1 = \left(a + bx + cx^2 + o_0(x^2)\right)\sqrt{4-x}$$

Idea: confronto tra sviluppi asintotici

$$-1 + x = \left(a+bx+cx^2+o_0(x^2)\right) \cdot 2\sqrt{1 \underbrace{- x/4}_{t \to 0}} = \left(a+bx+cx^2+o(x^2)\right) \cdot$$

$$= \left(a+bx+cx^2+o(x^2)\right) \cdot 2\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + o_0(x^2)\right)$$

$$= \left(a+bx+cx^2+o(x^2)\right) \cdot \left(2 - x/4 - \frac{x^2}{64} + o_0(x^2)\right)$$

$$= 2a + \left(2b - a/4\right)x + \left(-\frac{a}{64} - b/4 + 2c\right)x^2 + o_0(x^2)$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} -1 = 2a \\ 1 = 2b - a/4 \\ 0 = -a/64 - b/4 + 2c \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 7/16 \\ c = 13/256 \end{cases}$$

Si può usare questo stesso metodo "a cascata" per calcolare lo sviluppo di $\operatorname{tg} x$ in $x \to 0$: essendo una funzione infinitesima dispari, sarà

$$\operatorname{tg} x = ax + bx^3 + cx^5 + o_0(x^6) \quad \text{per certi } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ da determinare.}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^6) \iff \sin x = \left(ax + bx^3 + cx^5 + o_0(x^6)\right)\cos x$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_0(x^6) = \left(ax + bx^3 + cx^5 + o_0(x^6)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^5)\right)$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o_0(x^6) = ax + \left(-\frac{a}{2} + b\right)x^3 + \left(\frac{1}{24}a - \frac{1}{2}b + c\right)x^5 + o_0(x^6)$$

$$\iff \begin{cases} a = 1 \\ -a/2 + b = -1/6 \\ 1/24\, a - \frac{1}{2}b + c = \frac{1}{120} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1/3 \\ c = 2/15 \end{cases}$$

(come già scritto nella Tabella)

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI
PROPOSTI PER CASA IL 4/11
E NON SVOLTI OGGI IN AULA

Determinare lo sviluppo asintotico almeno al secondo (o terzo) ordine (cioè con almeno due (o tre) termini significativi, la p.p. e un altro) delle sgg. funzioni nei punti indicati.

(1) Sviluppare $f(x) = \sin 3x$ in $x \sim 0$ e $x \sim 1$

In $x \sim 0$: $\sin \underset{t \to 0}{3x} = (3x) - \frac{1}{6}(3x)^3 + \mathcal{O}_0(x^4) = \overset{p.p.}{3x} - \frac{9}{2}x^3 + \mathcal{O}_0(x^4)$

In $x \sim 1$: poniamo $x = 1+t$, $\sin 3x = \sin(3+3t) = (\sin 3)\cos 3t + (\cos 3)\sin 3t$

$$= (\sin 3)\left(1-\tfrac{1}{2}(3t)^2+o_0(t^3)\right)+(\cos 3)\left(3t-\tfrac{9}{2}t^3+o_0(t^4)\right)$$

$$= \underbrace{(\sin 3)}_{p.p.}+(3\cos 3)\,t-\left(\tfrac{9}{2}\sin 3\right)t^2+o_0(t^2)$$

Poi sostituire t con $x-1$.

(2) Sviluppare $f(x)=\sqrt[5]{2x^2+1}-1$ in $x\sim 0$ e $x\sim+\infty$.

In $x=0$: $$f(x)=(1+\underbrace{2x^2}_{t\to 0})^{1/5}-1=\tfrac{1}{5}(2x^2)+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2}(2x^2)^2+o_0(x^5)$$

$$=\tfrac{2}{5}x^2-\frac{8}{25}x^4+o_0(x^5)$$

In $x\sim+\infty$: $$f(x)=\underbrace{\sqrt[5]{2}\cdot x^{2/5}}_{p.p.}\left(\sqrt[5]{1+\underbrace{\tfrac{1}{2x^2}}_{t\to 0}}\right)-1=$$

$$=\sqrt[5]{2}\cdot x^{2/5}\left(1+\tfrac{1}{5}\cdot\left(\tfrac{1}{2x^2}\right)+o_{+\infty}(x^{-3})\right)-1$$

$$=\sqrt[5]{2}\cdot x^{2/5}+\frac{\sqrt[5]{2}}{10}\cdot x^{-8/5}+o_{+\infty}\left(x^{-13/5}\right)-1$$

$$=\sqrt[5]{2}\cdot x^{2/5}-1+\frac{\sqrt[5]{2}}{10}x^{-8/5}+o_{+\infty}\left(x^{-13/5}\right)$$

(4) • $f(x)=x^3\cos 2x$ in $x\sim 0$

$$f(x)=x^3\left(1-\tfrac{1}{2}(2x)^2+\tfrac{1}{24}(2x)^4+o_0(x^5)\right)=x^3-2x^5+\tfrac{2}{3}x^7+o_0(x^8)$$

(notare che f è dispari, dunque è normale che lo sviluppo in $x\sim 0$ contenga solo potenze dispari di x)

(5) • $f(x)=\sqrt[3]{\cos 2x}$ in $x\sim 0$

$$f(x)=\sqrt[3]{1+\underbrace{(\cos 2x-1)}_{\text{è un infinitesimo } \sim_0^* x^2}}=1+\tfrac{1}{3}(\cos 2x-1)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}(\cos 2x-1)^2+o_0(x^5)$$

$$=1+\tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{2}(2x)^2+\tfrac{1}{24}(2x)^4+o_0(x^5)\right)-\tfrac{1}{9}\left(-\tfrac{1}{2}(2x)^2+\tfrac{1}{24}(2x)^4+o_0(x^5)\right)^2+o_0(x^5)$$

$$=1-\tfrac{2}{3}x^2+\tfrac{2}{9}x^4+o_0(x^5)-\tfrac{1}{9}\left(4x^4+o_0(x^5)\right)+o_0(x^5)$$

$$=1-\tfrac{2}{3}x^2-\tfrac{2}{9}x^4+o_0(x^5)$$ (notare che f è pari, dunque in $x\sim 0$ ci sono solo potenze pari!)

(6) • $f(x)=\sqrt{x^4+9}$ in $x\sim 0$ e $x\sim+\infty$

In 0: $$f(x)=3\sqrt{1+\underbrace{x^4/9}_{\to 0}}=3\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot x^4/9-\tfrac{1}{8}\left(x^4/9\right)^2+o_0(x^{11})\right)=3+\tfrac{1}{6}x^4-\tfrac{1}{216}x^8+o_0(x^{11})$$

In $+\infty$: $$f(x)=x^2\sqrt{1+\underbrace{9/x^4}_{\to 0}}=x^2\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot 9/x^4-\tfrac{1}{8}\left(9/x^4\right)^2+o_{+\infty}(x^{-11})\right)=x^2+\tfrac{9}{2}x^{-2}-\tfrac{81}{8}x^{-6}+o_{+\infty}(x^{-9})$$

(7) • $f(x) = \log(2x+5)$ in $x \sim -1$ e $x \sim +\infty$

In $x \sim -1$: pongo $t = x+1 \sim 0$ e ho

$$f(x) = \log(3+2t) \sim_0 \log 3 \; ; \quad \text{poi} \quad \log(3+2t) - \log 3 = \log\left(\frac{3+2t}{3}\right) =$$

$$= \log\left(1 + \frac{2t}{3}\right) = \left(\frac{2t}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(2t/3\right)^2 + \theta_0(t^2) = \frac{2}{3}t - 2/9\, t^2 + \theta_0(t^2),$$

dunque $\log(3+2t) = \log 3 + 2/3\, t - 2/9\, t^2 + \theta_0(t^2)$, e sostituendo $t = x+1$:

$$f(x) = \log 3 + 2/3\,(x+1) - 2/9\,(x+1)^2 + \theta_{-1}((x+1)^2).$$

In $x \sim +\infty$: poiché $2x+5 \sim_{+\infty} 2x$ e non tendono a 1, di certo si ha

$$f(x) = \log(2x+5) \sim_{+\infty} \log(2x) = \log x + \log 2 \sim_{+\infty} \log x \quad (\text{parte principale a } +\infty).$$

Poi si ha $f(x) - \log x = \log\left(\frac{2x+5}{x}\right) = \log(2 + 5/x) \sim_{+\infty} \log 2$ (sempre perché $2+5/x \sim_{+\infty} 2$ e non tende a 1)

Infine, se si vuole un terzo termine, $\log(2+5/x) - \log 2 = \log(1 - 5/2x) \sim_{+\infty} -5/2x$,

e perciò $\quad f(x) = \log x + \log 2 - 5/2x + \theta_{+\infty}(x^{-1})$.

(8) • $f(x) = (1+x)\log(1+x)$ in $x \sim 0$ e $x \sim +\infty$.

In $x \sim 0$: $(1+x)\log(1+x) = (1+x)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \theta_0(x^3)\right)$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \theta_0(x^3) + x^2 - 1/2\, x^3 + \theta_0(x^3)$$

$$= x - 1/2\, x^2 - 1/6\, x^3 + \theta_0(x^3)$$

In $x \sim +\infty$: iniziamo con lo sviluppo $\log(x+1)$.

$\log(x+1) \sim_{+\infty} \log x$; poi $\log(x+1) - \log x = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \theta_{+\infty}(x^{-2})$

e perciò $\log(x+1) = \log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \theta_{+\infty}(x^{-2})$, da cui

$$f(x) = (x+1)\left(\log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \theta_{+\infty}(x^{-2})\right)$$

$$= x\log x + 1 - \frac{1}{2x} + \theta_{+\infty}(x^{-1}) + \log x + \frac{1}{x} + \theta_{+\infty}(x^{-1})$$

$$= x\log x + \log x + 1 + \frac{1}{2x} + \theta_{+\infty}(x^{-1}).$$

(nella scala di potenze e logaritmi $x^\alpha \log^\beta x$)

(9) • $f(x) = \frac{1}{x+2}$ in $x \sim 0$ e $x \sim +\infty$

In $x \sim 0$: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x/2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)\cdot\frac{x}{2} + \frac{(-1)(-1-1)}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \theta_0(x^2)\right)$

$$= 1/2\left(1 - x/2 + x^2/4 + \theta_0(x^2)\right) = 1/2 - 1/4\, x + 1/8\, x^2 + \theta_0(x^2)$$

oppure:

oppure, ricordando che per $|q|<1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1+q+q^2+q^3+\cdots = \frac{1}{1-q} \quad \left(\text{somma della serie geometrica}\right)$$

si ha $\displaystyle \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-x/2)} = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots\right)$

In $x\sim+\infty$: analogamente al caso precedente, raccogliendo sotto x anziché 2:

$$f(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+2/x} = \frac{1}{x}\left(1+\left(-\frac{2}{x}\right)+\left(-\frac{2}{x}\right)^2+o_{+\infty}(x^{-2})\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + o_{+\infty}(x^{-3})$$

(10) • $f(x) = e^{\frac{\sin x}{2}}$ in $x\sim 0$ e $x\sim -\pi$

In $x\sim 0$: $\displaystyle f(x) = e^{\frac{\sin x}{2}} = 1+\left(\frac{\sin x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2+o_0(x^2)$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(x+o_0(x^2)\right)+\frac{1}{8}\left(x+o_0(x^2)\right)^2+o_0(x^2)$$

$$= 1+\frac{1}{2}x+o_0(x^2)+\frac{1}{8}\left(x^2+o_0(x^2)\right)+o_0(x^2)$$

$$= 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2+o_0(x^2)$$

In $x\sim-\pi$: posto $t = x+\pi$, ovvero $x=-\pi+t$, si ha

$$e^{\frac{\sin x}{2}} = e^{\frac{1}{2}\sin(t-\pi)} = e^{-\frac{1}{2}\sin t} = e^{\frac{1}{2}\sin(-t)}$$

sfruttando lo sviluppo appena ottenuto per $x\sim 0$

$$= 1+\frac{1}{2}(-t)+\frac{1}{8}(-t)^2+o_0(t^2) = 1-\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t^2+o_0(t^2),$$

dunque risostituendo $t=x+\pi$ si ha $f(x) = 1-\frac{1}{2}(x+\pi)+\frac{1}{8}(x+\pi)^2+o_{-\pi}((x+\pi)^2)$.

(11) $f(x) = \log(\sin x)$ in $x\sim 0^+$ e $x\sim \pi/2$

In $x\sim 0^+$: $f(x) = \log(\sin x) \sim_{0^+} \log x$ (sempre perché $\sin x \sim_{0^+} x$ e non tende a 1)

e poi $\displaystyle f(x) - \log x = \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\left(1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right)$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)^3+o_0\left(\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)^3\right).$$

Ora, si ha $\displaystyle \frac{\sin x}{x}-1 = \frac{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)}{x} = -\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o_0(x^5)$,

(in particolare $\frac{\sin x}{x}-1 \sim_0^{*} x^2$), dunque

$$f(x)-\log x = \left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o_0(x^5)\right)-\frac{1}{2}(\dots)^2+\frac{1}{3}(\dots)^3+o_0(x^6)$$

$$= -\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4+o_0(x^5)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}x^4+o_0(x^5)\right)+\left(o_0(x^5)\right)+o_0(x^6)$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \theta_0(x^5),$$ pertanto lo sviluppo cercato è

$$f(x) = \log x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \theta_{0^+}(x^5).$$

In $x \sim \pi/2$: posto $t = x - \pi/2$ si ha $f(x) = \log(\sin x) = \log(\sin(t+\pi/2)) =$

$$= \log(\cos(t)) = \log(1 + \underbrace{(\cos t - 1)}_{\text{infinitesimo } \sim^* t^2}) = (\cos t - 1) - \frac{1}{2}(\cos t - 1)^2 + \theta_0(t^4)$$

$$= \left(-t^2/2 + t^4/24 + \theta_0(t^5)\right) - \frac{1}{2}(\dots)^2 + \theta_0(t^4)$$

$$= -t^2/2 + t^4/24 + \theta_0(t^5) - \frac{1}{2}\left(t^4/4 + \theta_0(t^5)\right) + \theta_0(t^4)$$

$$= -t^2/2 - \frac{1}{12}t^4 + \theta_0(t^4)$$ (per uno sviluppo più lungo bisognerebbe sviluppare $\log(\cos t)$ fino al 3° termine)

da cui, risostituendo $t = x - \pi/2$, si ha $f(x) = -\frac{1}{2}(x-\pi/2)^2 - \frac{1}{12}(x-\pi/2)^4 + \theta_{\pi/2}((x-\pi/2)^4)$.

(12) • $f(x) = \sqrt{x+3}$ in $x \sim 0$, $x \sim 1$ e $x \sim +\infty$

In $x \sim 0$: $f(x) = \sqrt{3}\sqrt{1 + x/3} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \theta_0(x^2)\right)$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}x - \frac{1}{24\sqrt{3}}x^2 + \theta_0(x^2).$$

In $x \sim 1$: posto $t = x - 1$ si ha $f(x) = \sqrt{4+t} = 2\sqrt{1 + t/4}$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{2}\cdot t/4 - \frac{1}{8}(t/4)^2 + \theta_0(t^2)\right) = 2 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{64}t^2 + \theta_0(t^2),$$

da cui $f(x) = \sqrt{x+3} = 2 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{64}(x-1)^2 + \theta_1((x-1)^2)$.

In $x \sim +\infty$: $f(x) = \sqrt{x}\cdot\sqrt{1 + 3/x} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 3/x - \frac{1}{8}(3/x)^2 + \theta_{+\infty}(x^{-2})\right)$

$$= \sqrt{x} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} + \theta_{+\infty}(x^{-3/2}).$$

(13) • $f(x) = \log|x-1|$ in $x \sim 0$, $x \sim 1$ e $x \sim +\infty$

In $x \sim 0$: $f(x) = \log(1-x) = (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + \theta_0(x^3) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \theta_0(x^3)$.

In $x \sim 1$: posto $x - 1 = t$ ho $f(t) = \log|t|$, che in $t \sim 0$ è già tutto lo sviluppo richiesto (nella scala potenze-logaritmi $|t|^\alpha |\log|t||^\beta$)

Pertanto $f(x) = \log|x-1|$ è già lo sviluppo richiesto in $x \sim 1$.

In $x \sim +\infty$: $f(x) = \log(x-1) = \log\left(x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = \log x + \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ ($\frac{1}{x} \to 0$)

$$= \log x + \left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \theta_{+\infty}(x^{-2})$$

$$= \log x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \theta_{+\infty}(x^{-2}).$$

(14) • $f(x)=\dfrac{x+1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ in $x\sim-\infty$

molt. sopra e sotto per $t-\sqrt{t^2-1}$, dopo sotto viene 1

Posto $t=-x\sim+\infty$ si ha $f(t)=\dfrac{-t+1}{-t-\sqrt{(-t)^2-1}}=\dfrac{t-1}{t+\sqrt{t^2-1}}=(t-1)\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)$

$$=(t-1)\left(t-t\sqrt{1-1/t^2}\right)=(t-1)\cdot t\cdot\left(1-\left(1+\tfrac12\left(-\tfrac1{t^2}\right)-\tfrac18\left(-\tfrac1{t^2}\right)^2+\theta_{+\infty}(t^{-5})\right)\right)$$

$$=(t^2-t)\left(\frac1{2t^2}+\frac1{8t^4}+\theta_{+\infty}(t^{-5})\right)=\frac12+\frac1{8t^2}+\theta_{+\infty}(t^{-3})-\frac1{2t}-\frac1{8t^3}+\theta_{+\infty}(t^{-4})$$

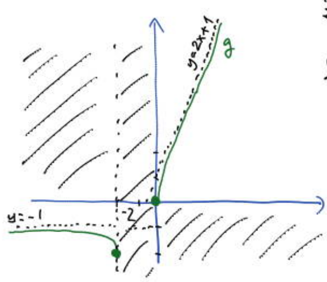
$$=\frac12-\frac1{2t}+\frac1{8t^2}-\frac1{8t^3}+\theta_{+\infty}(t^{-3}),$$ dopo risostituendo $t=-x$:

$$f(x)=\frac12+\frac1{2x}+\frac1{8x^2}-\frac1{8x^3}+\theta_{-\infty}(x^{-3})$$ (in particolare $f(x)=\frac12+\theta_{-\infty}(1)$, ovvero $f(x)$ ammette asintoto orizzontale $1/2$ a $-\infty$)

(15) • Determinare dominio, zeri e segno di $g(x)=\sqrt{x^2+2x}+x$; individuarne i limiti interessanti in $\widetilde{\mathbb{R}}$, e calcolarli dopo aver trovato la parte principale di g in tali punti.
Calcolare lo sviluppo fino al terzo ordine di g in 0.
Calcolare le fibre di g nel valore generico $y\in\mathbb{R}$, e usare quanto trovato per dire se g è iniettiva/suriettiva, e per invertirla dopo averla opportunamente (co)ristretta.

$g(x)=\sqrt{x^2+2x}+x$. Dominio: $x^2+2x\geq0$: $]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$.

Zeri: $g(x)=0$ $\quad\sqrt{x^2+2x}=-x$ $\quad\begin{cases}-x\geq0\\ x^2+2x=x^2\end{cases}$ $\quad x=0$



Segno: $g(x)>0$ $\quad\sqrt{x^2+2x}>-x$ $\quad$ se $-x<0$ (ovvero $x>0$) ok.
se invece $-x\geq0$ (ovvero $x\leq0$) allora ciò equivale a
$x^2+2x>(-x)^2=x^2 \iff \cancel{2}x>0$ impossibile

Dunque $g(x)>0 \iff x>0$.

g è continua ovunque nel suo dominio.

I soli limiti interessanti sono in $-\infty$ e in $+\infty$: è chiaro che $\lim_{+\infty} f(x)=+\infty$, mentre $\lim_{-\infty} f(x)$ è in f. i.: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\overset{-x}{|x|}\sqrt{1+2/x}+x\right)$

$$=\lim_{-\infty}x\left(1-\sqrt{1+2/x}\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(\cancel{1}-\left(\cancel{1}+\tfrac12\cdot\tfrac2x+\theta_{-\infty}(x^{-1})\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{-1}_{p.p.}+\theta_{-\infty}(1)\right)$$

$=-1$ (si deduce che -1 è asintoto orizz. per f a $-\infty$)

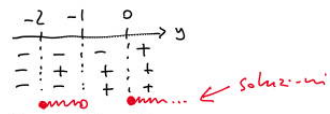
Inoltre, a $+\infty$, $f(x) = x\sqrt{1+2/x} + x = x\left(\sqrt{1+2/x}+1\right) = x\left(1+\frac{1}{x}+\theta_{+\infty}(x^{-1})+1\right)$

$= \underbrace{2x}_{pp} + 1 + \theta_{+\infty}(1)$ ovvero f ha asintoto obliquo $2x+1$ a $+\infty$.

In 0^+: $f(x) = \sqrt{x^2+2x}+x = \sqrt{2x}\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{x}{2}}_{\to 0}}+x = \sqrt{2x}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}+\theta_0(x)\right)+x$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{x} + x + \frac{1}{2\sqrt{2}}x\sqrt{x} + \theta_0(x^{3/2})$

Fibre: per $y\in\mathbb{R}$, da $g(x)=y$ si ha $\sqrt{x^2+2x}=y-x$, che necessariamente richiede $y-x\ge 0$, ovvero $y\ge x$: in tale ipotesi equivale a $x^2+2x=(y-x)^2=y^2-2xy+x^2$ ovvero $2x(y+1)=y^2$:
se $y=-1$ ciò dà $0=1$, assurdo; mentre se $y\neq -1$ si ottiene $x=\frac{y^2}{2(y+1)}$, ma ricordando che deve essere $y\ge x$ si ha la condizione $y\ge\frac{y^2}{2(y+1)}$, che dà $\frac{y(y+2)}{2(y+1)}\ge 0$:



Ricapitolando, la fibra è costituita da al più un elemento:

$$g^{-1}(y)=\begin{cases} x(y)=\dfrac{y(y+2)}{2(y+1)} & \text{se } (-2\le y<-1)\vee(y\ge 0)\\ \emptyset & \text{se } (y<-2)\vee(-1\le y<0). \end{cases}$$

Quindi la funzione è iniettiva, e tale resterà anche se ristretta a qualsiasi restrizione del dominio.
Per renderla biiettiva basta costringerla alla sua immagine $[-2,-1[\,\cup\,[0,+\infty[$, con inversa $x(y)$.
D'altra parte il dominio è l'unione disgiunta $\overbrace{]-\infty,-2]}^{A'}\cup\overbrace{[0,+\infty[}^{A''}$,
ed è chiaro che (ex: dallo studio del segno) $g(]-\infty,-2]) = \overbrace{[-2,-1[}^{B'}$ (con $g(-2)=-2$)
e $g([0,+\infty[) = \overbrace{[0,+\infty[}^{B''}$: dunque restringendo g a ciascuno di A' e A'' si ottiene un omeomorfismo con B' e B'' rispettivamente.

Calcolare i seguenti limiti, eventualmente al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

(16) • $\lim_{0,+\infty}\frac{x-\sin 2x+e^x-1}{x^\alpha}$. In $x\to 0^+$: se $\alpha\le 0$ viene $\frac{0}{1 \text{ o } +\infty}=0$.
Trattiamo il caso $\alpha>0$, con f.i. $\frac{0}{0}$.

Num: $\cancel{x}-\left(\cancel{2x}-\frac{1}{6}(2x)^3+\theta_0(x^4)\right)+\left(\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+\theta_0(x^2)\right)-\cancel{1} = \frac{x^2}{2}+\theta_0(x^2)\sim_0\frac{x^2}{2}$

dunque $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2/2}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2} x^{2-\alpha} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } \alpha<2 \\ 1/2 & \text{se } \alpha=2 \\ +\infty & \text{se } \alpha>2 \end{cases}$

In $x\sim+\infty$: $\quad x-\sin^2 x-1 = o_{+\infty}(e^x) \Rightarrow \displaystyle \lim = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha$

(17) • $\displaystyle \lim_{0^+,1,+\infty} \frac{\log x + x - 1}{x^\alpha - 1}$ (con $\underline{\alpha \neq 0}$)

Per $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}$: sopra vale $x-1 = o_0(\log x)$; sotto x^α è infinito se $\alpha<0$, infinitesimo se $\alpha>0$. Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x + x - 1}{x^\alpha - 1} = \begin{cases} (\text{se } \alpha>0) \ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{-1} = +\infty \\ (\text{se } \alpha<0) \ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} x^{-\alpha} \log x = 0^- . \end{cases}$$

Per $\displaystyle\lim_{x\to 1}$: posto $t=x-1\sim 0$ il num. è $\log(1+t)+t = (t+o_0(t))+t \sim_0 2t$ mentre il denom. è $(1+t)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha t$: il lim. diventa così $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{2\cancel{t}}{\alpha \cancel{t}} = 2/\alpha$.

Per $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}$: sopra vale $\log x - 1 = o_{+\infty}(x)$; sotto x^α è infinitesimo se $\alpha<0$, infinito se $\alpha>0$. Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x + x - 1}{x^\alpha - 1} = \begin{cases} (\text{se } \alpha>0) \ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<1 \\ 1 & \text{se } \alpha=1 \\ 0^+ & \text{se } \alpha>1 \end{cases} \\ (\text{se } \alpha<0) \ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-1} = -\infty . \end{cases}$$

(19) • $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[4]{x+2}-1}{x+1} \overset{\text{f.i. } 0/0 \text{ : poniamo } t=x+1\sim 0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+t}-1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{4}t}{t} = 1/4$.

(20) • $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\sin x) - \cosh x + 1}{\sqrt[4]{1+2x^4} - 1}$.

Numeratore: $\log(1+\overset{\text{infinitesimo} \sim x^2}{x\sin x}) = (x\sin x) - \frac{1}{2}(x\sin x)^2 + o_0(x^5)$

$= x\left(x - x^3/6 + o_0(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(x\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)\right)^2 + o_0(x^5)$

$= x^2 - \frac{x^4}{6} + o_0(x^5) - \frac{1}{2}\left(x^4 + o_0(x^5)\right) + o_0(x^5)$

$= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^5)$,

$-\cosh x = -\left(1 + x^2/2 + x^4/24 + o_0(x^5)\right) = -1 - x^2/2 - x^4/24 + o_0(x^5)$,

dunque num $= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^5) \cancel{-1} - x^2/2 - x^4/24 + o_0(x^5) \cancel{+1}$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{17}{24}x^4 + o_0(x^5) \sim_0 \frac{x^2}{2} \ ;$$

Denominatore $\sqrt[4]{1+2x^4} - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{4}(2x^4) + o_0(x^7) - \cancel{1} \sim_{0^+} \frac{x^4}{2}$

Pertanto il limite richiesto vale $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2/2}{x^4/2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

(21) • $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\log(x^2-3)}{|x-2|^\alpha}$. Posto $t = x-2 \sim 0$ diventa $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\log(1+\underbrace{4t+t^2}_{\to 0})}{|t|^\alpha}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{4t+t^2}{|t|^\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{4t}{|t|^\alpha} = \quad \leftarrow \text{scritto } t = |t| \operatorname{sign} t$$

$$= \lim_{t\to 0} (4 \operatorname{sign} t)\cdot |t|^{1-\alpha} = (\text{per } t \to 0^\pm) \begin{cases} \pm\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \pm 4 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0^\pm & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

(22) • $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha \log^3 x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha \log^3 x}{\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x^{\alpha-2}\log^3 x = \begin{cases} 0^- & \text{se } \alpha > 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha \le 2 \end{cases}$

(23) • $\lim\limits_{x\to 0^+, \pi/4, 1} \dfrac{e^{\alpha \sin x} - 1}{\operatorname{tg}(2x)}$ Se $\alpha = 0$ il limite è ovviamente 0. Sia ora $\alpha \neq 0$.

Per 0^+: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\overbrace{\alpha \sin x}^{\to 0}} - 1}{\operatorname{tg} 2x} \overset{\substack{e^t - 1 \sim_0 t \\ \operatorname{tg} t \sim_0 t}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha \sin x}{2x} = \dfrac{\alpha}{2}$

Per $\pi/4$: $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{e^{\alpha \sin x} - 1}{\operatorname{tg}(2x)} \overset{\frac{\text{finito}}{\infty}}{=} 0$.

Per 1: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{\alpha \sin x} - 1}{\operatorname{tg} 2x} = \dfrac{e^{\alpha \sin 1} - 1}{\operatorname{tg} 2}$.

(26) • $\lim\limits_{0^+, 1, +\infty} \dfrac{\alpha x + \sin x}{1 + 2x^\alpha - e^{x-2x^2}}$

Sia $f_\alpha(x) := \frac{\alpha x + \sin x}{1+2x^\alpha - e^{x-2x^2}}$: i tre punti 0, 1 e $+\infty$ sono di accumulazione per il suo dominio, dunque i limiti richiesti hanno senso per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Discuteremo da subito il caso generale $\alpha \in \mathbb{R}$, lasciando $\alpha = 1$ come caso particolare. • Iniziamo da 0^+. Se $\alpha \neq -1$ il numeratore è asintotico a $(\alpha+1)x$, mentre se $\alpha = -1$ è asintotico a $-\frac{1}{6}x^3$; quanto al denominatore, notando che $1 - e^{x-2x^2} \sim_0 -(x-2x^2) \sim_0 -x$, si ha che se $\alpha < 0$ esso tende a $+\infty$, se $\alpha = 0$ tende a 2, se $0 < \alpha < 1$ è asintotico a $2x^\alpha$, se $\alpha = 1$ è asintotico a $2x - x = x$ mentre se $\alpha > 1$ è asintotico a $-x$. Pertanto $\lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x)$ vale 0 se $\alpha < 1$ (più precisamente vale 0^- se $\alpha \le -1$ e vale 0^+ se $-1 < \alpha < 1$); vale 2 se $\alpha = 1$; e vale $-(\alpha+1)$ se $\alpha > 1$. • Passiamo a 1. Il numeratore tende a $\alpha + \sin 1$, mentre il denominatore tende a $3 - \frac{1}{e}$: dunque $\lim_{x\to 1} f_\alpha(x) = \frac{e(\alpha+\sin 1)}{3e-1}$. • Infine vediamo in $+\infty$. Se $\alpha \neq 0$ il numeratore è asintotico a αx, mentre se $\alpha = 0$ esso diventa $\sin x$; d'altra parte il denominatore tende a 1 (se $\alpha < 0$), a 3 (se $\alpha = 0$) oppure è asintotico a $2x^\alpha$ (se $\alpha > 0$). Pertanto $\lim_{x\to +\infty} f_\alpha(x)$ vale $-\infty$ (se $\alpha < 0$), non esiste (se $\alpha = 0$), vale $+\infty$ (se $0 < \alpha < 1$), vale $\frac{1}{2}$ (se $\alpha = 1$) e vale 0^+ (se $\alpha > 1$).

(27) • $$\lim_{0^+,1,+\infty} \frac{1+\log x - x^\alpha}{\alpha e^{x-1}+\cos(\pi x)}$$

Sia $f_\alpha(x) := \frac{1+\log x - x^\alpha}{\alpha e^{x-1}+\cos(\pi x)}$: i tre punti 0, 1 e $+\infty$ sono di accumulazione per il suo dominio, dunque i limiti richiesti hanno senso per ogni α. Discuteremo subito il caso generale $\alpha \in \mathbb{R}$, lasciando $\alpha = 1$ come caso particolare.
• In 0^+ il numeratore tende sempre a $-\infty$, mentre il denominatore tende a $\frac{\alpha}{e}+1$: dunque se $\frac{\alpha}{e}+1<0$ (cioè se $\alpha < -e$) il limite vale $+\infty$, e se $\frac{\alpha}{e}+1>0$ (cioè se $\alpha > -e$, ad esempio se $\alpha = 1$) il limite vale $-\infty$; nel caso particolare in cui $\frac{\alpha}{e}+1=0$ (cioè $\alpha=-e$) il denominatore diventa $-e^x+\cos(\pi x) = -1-x+o_0(x)+1-\frac{1}{2}(\pi x)^2+o_0(x^3) \sim_0 -x$ e dunque tende a 0^-, perciò il limite vale $+\infty$. • Passiamo a 1. Il numeratore è sempre infinitesimo, mentre il denominatore lo è solo nel caso $\alpha = 1$: pertanto se $\alpha \neq 1$ il limite vale 0. Invece nel caso $\alpha = 1$ converrà fare il cambio di variabile $t = x-1$, ottenendo $\lim_{t\to 0} \frac{1+\log(1+t)-(1+t)}{e^t-\cos(\pi t)} = \lim_{t\to 0} \frac{1+(t-\frac{1}{2}t^2+o_0(t^2))-1-t}{1+t+o_0(t)-(1-\frac{1}{2}(\pi t)^2+o_0(t^3))} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2+o_0(t^2)}{t+o_0(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{t} = 0$.
• Infine vediamo in $+\infty$. Il numeratore se $\alpha > 0$ tende a $-\infty$ con andamento di potenza, mentre se $\alpha \le 0$ tende a $+\infty$ con andamento logaritmico; d'altra parte se $\alpha \gtrless 0$ il denominatore tende a $\pm\infty$ con andamento esponenziale, mentre se $\alpha = 0$ non ha limite (è solo limitato tra -1 e 1). Pertanto se $\alpha \neq 0$ il limite $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$ vale 0 (più precisamente vale se $0^\mp$ se $\alpha \gtrless 0$, dunque se $\alpha = 1$ vale 0^-) e non esiste se $\alpha = 0$ (tuttavia in quest'ultimo caso, essendo il numeratore infinito e il denominatore limitato, si può affermare che la funzione diverge a ∞).
Ricapitolando, nel caso $\alpha = 1$ si ha $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1} f_1(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0^-$.

(28) • $$\lim_{-\infty,0,+\infty} \frac{1-\cos 2x - 2(e^{\alpha x}-1)^2}{2(\sqrt{1+x^4}-1)-\alpha \sin^3 x}$$

Sia $f_\alpha(x) = \frac{1-\cos 2x - 2(e^{\alpha x}-1)^2}{2(\sqrt{1+x^4}\ -1)-\alpha\sin^3 x}$: i tre punti 0 e $\mp\infty$ sono di accumulazione per il suo dominio, dunque i limiti richiesti hanno senso. Iniziamo dal caso $\alpha = 1$, in cui si ottiene $f_1(x) = \frac{1-\cos 2x-2(e^x-1)^2}{2(\sqrt{1+x^4}\ -1)-\sin^3 x}$ • In $-\infty$ il numeratore $N(x)$ è limitato e il denominatore $D(x)$ è infinito, dunque il limite vale 0. • In $+\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} -2e^{2x}$ e $D(x) \sim_{+\infty} 2x^2$, dunque il limite vale $-\infty$. • In 0^+ sia $N(x)$ che $D(x)$ sono infinitesimi: essendo $N(x) = 1-(1-\frac{1}{2}(2x)^2+o_0(x^3))-2(1+x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2)-1)^2 = 1-1+2x^2+o_0(x^3)-2(x^2+x^3+o_0(x^3)) = -2x^3+o_0(x^3) \sim_0 -2x^3$ e $D(x) = 2(1+\frac{1}{2}x^4+o_0(x^4)-1)-(x^3+o_0(x^4)) = -x^3+o_0(x^3) \sim_0 -x^3$, il limite vale 2.
Passiamo ora a discutere $\alpha \in \mathbb{R}$. • In $-\infty$, se $\alpha \geq 0$ vale il discorso precedente, e il limite vale 0; se invece $\alpha < 0$ si ha $N(x) \sim_{-\infty} -2e^{\alpha x}$ e $D(x) \sim_{+\infty} 2x^2$, dunque il limite vale $-\infty$. • In $+\infty$, se $\alpha \geq 0$ vale il discorso precedente, e il limite vale $-\infty$; se invece $\alpha < 0$ si ha che $N(x)$ è limitato e $D(x) \sim_{+\infty} 2x^2$, dunque il limite vale 0. • In 0^+ sia $N(x)$ che $D(x)$ sono ancora infinitesimi e si può procedere come prima, ma escludiamo il caso già visto $\alpha = 1$ (in cui il limite vale 2) e trattiamo a parte il caso $\alpha = 0$ in cui, essendo $f_0(x) = \frac{1-\cos 2x}{2(\sqrt{1+x^4}\ -1)} \sim_0 \frac{x^2/2}{2(x^4/2)} = \frac{1}{2x^2}$, il limite vale $+\infty$. Nel seguito supporremo perciò che $\alpha \notin \{0, 1\}$. Si ha $N(x) = 1-(1-\frac{1}{2}(2x)^2+o_0(x^3))-2(1+\alpha x+\frac{1}{2}(\alpha x)^2+o_0(x^2)-1)^2 = 1-1+2x^2+o_0(x^3)-2(\alpha^2x^2+\alpha^3x^3+o_0(x^3)) = 2(1-\alpha^2)x^2-2\alpha^3x^3+o_0(x^3)$, dunque se $\alpha \neq -1$ vale $N(x) \sim_0 2(1-\alpha^2)x^2$ mentre se $\alpha = -1$ vale $N(x) \sim_0 2x^3$; d'altra parte $D(x) = 2(1+\frac{1}{2}x^4+o_0(x^4)-1)-\alpha(x^3+o_0(x^4)) = -\alpha x^3+o_0(x^3) \sim_0 -\alpha x^3$. Pertanto se $\alpha \neq -1$ il limite vale ∞ (col segno che dipende da quelli di α, di $1-\alpha^2$ e dal fatto che si tenda a $0^\mp$), mentre se $\alpha = -1$ il limite vale $\frac{2}{-(-1)} = 2$.

(29) • $\lim\limits_{0^+, +\infty} \dfrac{2-\cos\sqrt{2x} - e^{\alpha x}}{x^2 - 2x^\alpha}$

Sia $f_\alpha(x) = \frac{2-\cos(\sqrt{2x})-e^{\alpha x}}{x^2-2x^\alpha}$: i punti 0 e $+\infty$ sono di accumulazione per il suo dominio, dunque i limiti richiesti hanno senso. Iniziamo dal caso $\alpha = 1$, in cui si ottiene $f_1(x) = \frac{2-\cos(\sqrt{2x})-e^{x}}{x^2-2x}$ • In 0^+ sia $N(x)$ che $D(x)$ sono infinitesimi: essendo $N(x) = 2-(1-\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2+\frac{1}{24}(\sqrt{2x})^4+o_{0^+}((\sqrt{2x})^5))-(1+x+\frac{1}{2}x^2+o_{0^+}(x^2)) = -\frac{2}{3}x^2+o_{0^+}(x^2) \sim_{0^+} -\frac{2}{3}x^2$ e $D(x) = x^2-2x = -2x+o_{0^+}(x) \sim_{0^+} -2x$, il limite vale 0^+. • In $+\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} -e^x$ e $D(x) \sim_{+\infty} x^2$, dunque il limite vale $-\infty$.
Passiamo ora a discutere $\alpha \in \mathbb{R}$ (escludendo il caso $\alpha = 1$ già visto). • In 0^+, se $\alpha \le 0$ si ha che $N(x)$ è infinitesimo mentre $D(x)$ no: dunque il limite vale 0. Se invece $\alpha > 0$ sia $N(x)$ che $D(x)$ sono infinitesimi: procedendo come prima si ottiene $N(x) = 2-(1-\frac{1}{2}(\sqrt{2x})^2+\frac{1}{24}(\sqrt{2x})^4+o_{0^+}((\sqrt{2x})^5))-(1+(\alpha x)+\frac{1}{2}(\alpha x)^2+o_{0^+}(x^2)) = (1-\alpha)x+o_{0^+}(x) \sim_{0^+} (1-\alpha)x$; d'altra parte, se $0<\alpha<2$ si ha $D(x) \sim_{0^+} -2x^\alpha$, se $\alpha = 2$ si ha $D(x) = -x^2$ e se $\alpha > 2$ si ha $D(x) \sim_{0^+} x^2$. Pertanto se $0 < \alpha < 1$ il limite vale 0, se $1 < \alpha \le 2$ vale $+\infty$; e se $\alpha > 2$ vale $-\infty$. • In $+\infty$, se $\alpha > 0$ vale il discorso precedente, e il limite vale $\mp\infty$ (a seconda che $\alpha > 2$ oppure $0 < \alpha \le 2$); se invece $\alpha < 0$ si ha che $N(x)$ è limitato e $D(x)$ infinito, dunque il limite vale 0.

(30) • $\lim\limits_{0^+, +\infty} \dfrac{x+2-e^{3\alpha x} - \sqrt{|1-4x|}}{2x^{2\alpha} - \log^2(1+x)}$

Sia $f_\alpha(x) = \frac{x+2-e^{3\alpha x}-\sqrt{|1-4x|}}{2x^{2\alpha}-\log^2(1+x)}$: i punti 0^+ e $+\infty$ sono di accumulazione per il suo dominio, dunque i limiti richiesti hanno senso. Iniziamo dal caso $\alpha = 1$, in cui si ottiene $f_1(x) = \frac{x+2-e^{3x}-\sqrt{|1-4x|}}{2x^2-\log^2(1+x)}$. • In 0^+ sia $N(x)$ che $D(x)$ sono infinitesimi: essendo $N(x) = x+2-(1+(3x)+\frac{1}{2}(3x)^2+o_0(x^2))-(1+\frac{1}{2}(-4x)-\frac{1}{8}(-4x)^2+o_0(x^2)) = -\frac{5}{2}x^2+o_0(x^2) \sim_0 -\frac{5}{2}x^2$ e $D(x) = 2x^2-(x+o_0(x))^2 = 2x^2-(x^2+o_0(x^2)) = x^2+o_0(x^2) \sim_0 x^2$, il limite vale $-\frac{5}{2}$. • In $+\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} -e^{3x}$ e $D(x) \sim_{+\infty} 2x^2$, dunque il limite vale $-\infty$.
Passiamo ora a discutere $\alpha \in \mathbb{R}$ (escludendo in partenza il caso $\alpha = 1$ già trattato). • In 0^+ il numeratore $N(x)$ è ancora infinitesimo, e procedendo come prima si trova $N(x) \sim_0 3(1-\alpha)x$. D'altra parte il denominatore $D(x)$ è infinitesimo quando $\alpha > 0$, ed è $\sim_0 2x^{2\alpha}$ (se $2\alpha < 2$, ovvero se $0<\alpha<1$) oppure $\sim_0 -x^2$ (se $2\alpha > 2$, ovvero se $\alpha > 1$); invece se $\alpha \le 0$ è finito o infinitesimo. Dunque se $\alpha \le 0$ il limite vale 0; se $0 < \alpha < 1$ il limite vale come quello di $\frac{3(1-\alpha)x}{2x^{2\alpha}} = \frac{3}{2}(1-\alpha)x^{1-2\alpha}$, dunque vale 0 se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, vale $\frac{3}{4}$ se $\alpha = \frac{1}{2}$, e vale $+\infty$ se $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; infine, se $\alpha > 1$ il limite vale $-(-\infty) = +\infty$. • In $+\infty$, se $\alpha > 0$ vale il discorso precedente, e il limite vale $-\infty$; se invece $\alpha \le 0$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} x$ e $D(x) \sim_{+\infty} -\log^2 x$, dunque il limite vale $-\infty$.