3 Funzioni di una variabile reale

Il nucleo centrale del corso, che affrontiamo in questo capitolo, consiste nello studio delle funzioni reali di una variabile reale, ovvero le $f : A \to \mathbb{R}$ che ad ogni elemento x del dominio $A \subset \mathbb{R}$ assegnano uno ed un ben precisato valore reale $f(x)$.

3.1 Generalità

Prima di approfondire la conoscenza "locale" delle funzioni tramite la nozione di limite, richiamiamo alcune nozioni "globali", dipendenti dalle sole proprietà di corpo commutativo totalmente ordinato di $\mathbb{R}$.

Operazioni e ordine con le funzioni Le operazioni di somma e prodotto del corpo commutativo $\mathbb{R}$ inducono in modo naturale delle operazioni nell'insieme

Operazioni e ordine

$$\mathbb{R}^A := \{\text{funzioni } A \to \mathbb{R}\}$$

delle funzioni reali di una variabile reale con dominio un certo $A \subset \mathbb{R}$: se $f, g \in \mathbb{R}^A$ sono due funzioni, la loro *somma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ ed il loro *prodotto* $fg : A \to \mathbb{R}$ saranno le funzioni date da $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) := f(x)g(x)$ per ogni $x \in A$; se g non si annulla mai si potrà anche considerare la funzione *quoziente* $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ data da $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni $x \in A$. Tali operazioni fanno di $\mathbb{R}^A$ un anello (vedi pag. 40). In particolare, la funzione *opposta* di f è $-f : A \to \mathbb{R}$ data da $(-f)(x) = -f(x)$ e, se g non si annulla mai, la funzione *reciproca* di g è $\frac{1}{g} : A \to \mathbb{R}$ data da $(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{g(x)}$. Inoltre è definita una *moltiplicazione per scalari*: se $f \in \mathbb{R}^A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ si definisce la funzione $\alpha f : A \to \mathbb{R}$ tramite $(\alpha f)(x) := \alpha\, f(x)$. Somma e moltiplicazione per scalari fanno di $\mathbb{R}^A$ anche uno spazio vettoriale —anzi di più: un'algebra— sul corpo $\mathbb{R}$ (vedi pag. 42).
Dal fatto che dominio e codominio sono entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, ha anche senso "comporre" due funzioni: se $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $f(A) \subset B$ si definisce la funzione *composta* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ come $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in A$. La composizione è associativa e ha elemento neutro nella funzione identità $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ è una funzione biiettiva, allora come si sa è univocamente definita la funzione *inversa* $f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Dalla relazione d'ordine totale "$\leq$" di $\mathbb{R}$ si introduce inoltre una relazione d'ordine (parziale) in $\mathbb{R}^A$ ponendo $f \leq g$ se e solo se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$.

Esempi. **(1)** Se $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = \sin x$, allora $(h \circ (f + 3g))(x) = \sin(x^2 + 3|x|)$. **(2)** La funzione $\sqrt{\log(|x| - 4)}$ può essere vista come la composizione $h \circ g \circ f$, ove $f(x) = |x| - 4$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = \sqrt{x}$. **(3)** La funzione $6 \operatorname{arctg}^3(\sin x - 1)$ può essere vista come la composizione $k \circ h \circ g \circ f$, ove $f(x) = \sin x - 1$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $h(x) = x^3$ e $k(x) = 6x$. **(4)** La funzione $f : [2, 5[\to [-1, 8[$ è iniettiva (infatti,

$f(x_1) = f(x_2)$ equivale a $x_1^2 - x^2 = 4(x_1 - x_2)$, e se $x_1 \neq x_2$ ciò equivale a $x_1 + x_2 = 4$, ma ciò è impossibile se $x_1, x_2 \in [2, 5[$ perché ciò forzerebbe $x_1 = x_2 = 2$) e suriettiva (se $y \in [-1, 8[$, cercando le soluzioni $x \in [2, 5[$ di $f(x) = y$ si trovano i numeri *reali* $x = 2 \pm \sqrt{1+y}$, ed essendo $2 - \sqrt{1+y} \leq 2 \leq 2 + \sqrt{1+y} < 5$ si trova una ed una sola soluzione $2 + \sqrt{1+y} \in [2, 5[$), e dunque biiettiva. Il conto appena fatto ci permette inoltre di scrivere esplicitamente l'inversa $f^{-1} : [-1, 8[\to [2, 5[$: essa sarà $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{1+x}$.

Dominio naturale Molte funzioni sono date semplicemente esibendo l'espressione algebrica che permette, dato un certo x, di calcolare subito il valore $f(x)$, senza specificare chi sia il dominio $A \subset \mathbb{R}$ di f. In questo caso, si assume tacitamente che quest'ultimo sia il *dominio naturale* di f, ovvero il più grande sottoinsieme A_f di $\mathbb{R}$ per il quale tale espressione ha senso: bisognerà dunque essere in grado di determinare tale dominio naturale.

Dominio naturale

Esempi. **(0)** Se $f(x) = \sin(x^2 - 3|x|)$ oppure $f(x) = e^{5x - \cos x}$, nessuna condizione è richiesta per dare senso alle espressioni: dunque $A_f = \mathbb{R}$. **(1)** Sia $f(x) = \sqrt{(x+2)(3-x)}$. Per la realtà della radice bisognerà che sia $(x+2)(3-x) \geq 0$, e dunque $A_f = [-2, 3]$. **(2)** Sia $f(x) = \sqrt{\log(|x| - 4)} - \operatorname{tg}(x - 2)$. Per la realtà del logaritmo va richiesto che $|x| - 4 > 0$, per la radice che $\log(|x| - 4) \geq 0$, e per la tangente che $x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$. Si ottiene dunque il sistema $\begin{cases} |x| - 4 > 0 \\ \log(|x| - 4) \geq 0 \\ x - 2 \neq \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} |x| > 4 \\ |x| - 4 \geq 1 \\ x \neq 2 + \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \end{cases}$, e perciò $A_f = (\mathbb{R}_{\leq -5} \cup \mathbb{R}_{\geq 5}) \setminus \{2 + \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. **(3)** Sia $f(x) = \log|x^2 - 1| - \arcsin(\frac{|x|+|x-2|}{3})$. Si noti che l'argomento del logaritmo è $|x^2 - 1| \geq 0$: dunque, per l'esistenza del logaritmo basta richiedere che tale argomento sia non nullo, ovvero che $x \neq \pm 1$. Per l'esistenza dell'arco-seno, invece, va richiesto che il suo argomento $\frac{|x|+|x-2|}{3}$ stia in $[-1, 1]$ e perciò, poiché $\frac{|x|+|x-2|}{3}$ é ovviamente ≥ 0, la condizione diventa $\frac{|x|+|x-2|}{3} \leq 1$, ovvero $|x| + |x-2| \leq 3$: dunque se $x \leq 0$ si ha $-x - (x-2) \leq 3$, che dà $x \geq -\frac{1}{2}$ (da cui le soluzioni $[-\frac{1}{2}, 0]$); se $0 \leq x \leq 2$ si ha $x - (x-2) \leq 3$, che dà $2 \leq 3$, sempre vero (da cui le soluzioni $[0, 2]$); infine, se $x \geq 2$ si ha $x + (x-2) \leq 3$ che dà $x \leq \frac{5}{2}$ (da cui le soluzioni $[2, \frac{5}{2}]$). Riassumendo, $\log|x^2 - 1|$ ha senso per $x \neq \pm 1$, mentre $\arcsin(\frac{|x|+|x-2|}{3})$ ha senso per $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$: pertanto si ha $A_f = [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] \setminus \{1\}$.

Grafico Abbiamo visto che, in generale, se X, Y sono due insiemi e $f : X \to Y$ una funzione, il grafico di f è il sottoinsieme $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ del prodotto cartesiano $X \times Y$. Pertanto, il grafico di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ sarà un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, visualizzabile dunque come sottoinsieme del piano cartesiano (solitamente si identifica il dominio A con un sottoinsieme dell'asse delle ascisse, mentre l'asse delle ordinate funge da codominio). Per definizione di funzione, per ogni $x \in A$ esisterà allora *uno ed un solo* $y = f(x)$ tale che $(x, y) \in \Gamma_f$.
Appare allora chiaro che, data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$:

Grafico

- il grafico della funzione *opposta* $-f : A \to \mathbb{R}$, data da $(-f)(x) := -f(x)$, si ottiene riflettendo quello di f rispetto all'asse x;
- il grafico della funzione *riflessa* $f^r : -A = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\} \to \mathbb{R}$ data da $f^r(x) := f(-x)$ si ottiene riflettendo quello di f rispetto all'asse y;
- se $f : A \to B$ è biiettiva, il grafico della funzione *inversa* $f^{-1} : B \to A$ si ottiene riflettendo quello di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$: infatti, $(a, b) \in \Gamma_f$ se e solo se $b = f(a)$, cioè se e solo se $a = f^{-1}(b)$, cioè se e solo se $(b, a) \in \Gamma_{f^{-1}}$.

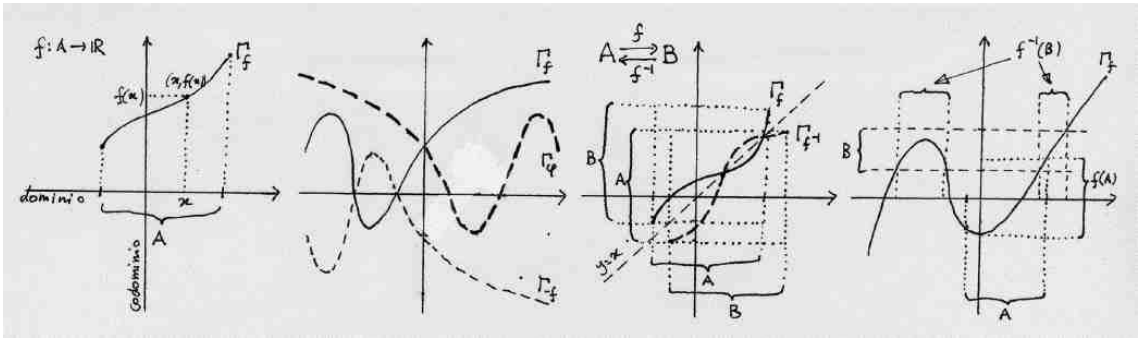

Figura 3.1: Grafico di una funzione; grafici della funzione opposta e speculare; grafico della funzione inversa; immagine e antiimmagine sul grafico.

Immagine e antiimmagine

Immagine e antiimmagine Se $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione, l'*immagine* di $A' \subset A$ è $f(A') = \{f(x) : x \in A'\} \subset \mathbb{R}$, l'insieme delle immagini degli elementi di A' (è dunque un sottoinsieme del codominio, visualizzabile sull'asse delle ordinate nella rappresentazione cartesiana). Invece l'*antiimmagine* di $B \subset \mathbb{R}$ è $f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\} \subset \mathbb{R}$, l'insieme dei punti del dominio A la cui immagine sta in B (si tratta dunque un sottoinsieme del dominio, visualizzabile sull'asse delle ascisse nella rappresentazione cartesiana). In generale è più facile calcolare un'antiimmagine che un'immagine: infatti, per l'antiimmagine $f^{-1}(B)$ va studiata la condizione $f(x) \in B$ (che si riduce di solito alla risoluzione diretta di sistemi di equazioni e/o disequazioni nell'incognita x), mentre per l'immagine $f(A')$ bisogna essere in grado di calcolare, per ogni y nel codominio, quali sono le sue antiimmagini (ovvero, chi è la "fibra" $f^{-1}(y)$) e poi controllare per quali y accade che almeno una di esse stia in A'. In generale, e specialmente per il calcolo dell'immagine, è utile avere un'idea abbastanza precisa dell'andamento della funzione (sapere se cresce o decresce, se "fa salti" o no...): in particolare, se si dispone del grafico della funzione ci si può rendere subito conto visivamente di che cosa siano immagini o antiimmagini.

Esempio. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato da $f(x) = x^2 - 2x - 3$ (il grafico è pertanto una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate, concavità rivolta verso l'alto, intersezioni con l'asse delle ascisse in -1 e 3 e vertice in $(1, -4)$). L'immagine di un intervallo $[a, b]$ del dominio non è facile da trovare senza dare un'occhiata al grafico, ed è una grave ingenuità dire che essa è sempre l'intervallo compreso tra $f(a)$ e $f(b)$: ad esempio, se $[a, b] = [-1, 4]$ si ha $f(-1) = 0$ e $f(5) = 12$ ma $f([-1, 5]) = [-4, 12]$, come verifichiamo ora. Dato $y \in \mathbb{R}$, per trovare la fibra $f^{-1}(y)$ bisogna risolvere $f(x) = x^2 - 2x - 3 = y$, e ciò è possibile solo per $y \geq -4$ con soluzioni $x_1 = 1 - \sqrt{y+4}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{y+4}$; la condizione $x_1 \in [-1, 5]$ diventa $-1 \leq 1 - \sqrt{y+4} \leq 5$, cioè $-2 \leq -\sqrt{y+4} \leq 4$, cioè $-2 \leq -\sqrt{y+4}$, cioè $\sqrt{y+4} \geq 5$, cioè $y \leq 0$, mentre la condizione $x_2 \in [-1, 5]$ diventa $-1 \leq 1 + \sqrt{y+4} \leq 5$, cioè $-2 \leq \sqrt{y+4} \leq 4$, cioè $\sqrt{y+4} \leq 4$, cioè $y \leq 12$. Ne deduciamo che quando $y \leq 12$ almeno uno tra x_1 e x_2 sta in $[-1, 5]$: questo, combinato con la succitata $y \geq -4$, dà quanto detto. Per calcolare l'antiimmagine diciamo dell'intervallo $]c, d]$ del codominio basta invece risolvere la disequazione $c < f(x) \leq d$ nell'incognita x: così, se si vuole l'antiimmagine di $[-3, 5]$ si deve risolvere $-3 \leq f(x) \leq 5$, ovvero il sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq -3 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 5 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 8 \leq 0 \end{cases}$, che dà le soluzioni $[-2, 0] \cup [2, 4]$.

Parità Se il dominio A di una funzione è simmetrico rispetto a 0 (ovvero se $-A = A$, cioè $x \in A$ se e solo se $-x \in A$), ha senso parlare di funzione "pari" o "dispari". La funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà *pari* se per ogni $x \in A$ vale $f(-x) = f(x)$ (ovvero se $f^r = f$), e *dispari* se per ogni $x \in A$ vale $f(-x) = -f(x)$ (ovvero se $f^r = -f$): in termini di grafico, ciò si nota dal fatto che quest'ultimo è simmetrico rispettivamente rispetto l'asse delle ordinate o rispetto l'origine. L'interesse del determinare la parità di una funzione f è evidente: se individuata, ciò permette di limitare lo studio di f a $A \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$. **Parità**

Esempi. **(0)** Se $0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$, si noti che allora $f(0) = 0$ (infatti $f(0) = f(-0) = -f(0)$). La sola funzione sia pari che dispari è la funzione nulla (infatti per ogni $x \in A$ dovrebbe essere $f(x) = f(-x) = -f(x)$). **(1)** La funzione potenza intera $f(x) = x^n$ (con $n \in \mathbb{Z}$) è pari per n pari e dispari per n dispari. **(2)** $\cos x$, $\cosh x$, $|x|$, $x^2 - x^4$, e^{x^2}, $\log|\sin x|$ sono esempi di funzioni pari; $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ $\sinh x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg}(x - x^3)$ sono esempi di funzioni dispari. **(3)** e^x, $x^2 - x$, $\log|x^2 + x + 1|$ non sono né pari né dispari.

Periodicità Una funzione periodica è una funzione che "si ripete inalterata ad intervalli regolari". Più precisamente, $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà *periodica* se esiste $\tau > 0$ tale che (i) $A = n\tau + A$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (ovvero, "A non cambia se lo si trasla a destra o sinistra di multipli interi di τ"), e (ii) per ogni $x \in A$ vale $f(x + \tau) = f(x)$. In tal caso, il più piccolo numero positivo τ_f con queste proprietà si dirà *periodo* di f, e tutti gli altri τ saranno suoi multipli interi. Anche qui, l'interesse del determinare la periodicità di una funzione f è evidente perché, se individuata, essa permette di limitare lo studio di f al tratto di A contenuto in un segmento $[n\tau_f, (n+1)\tau_f]$ per un qualsiasi $n \in \mathbb{Z}$. **Periodicità**

Esempi. **(1)** Come visto, $\sin x$ e $\cos x$ sono funzioni periodiche di periodo 2π, mentre $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ sono periodiche di periodo π. **(2)** Se $a, b \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x) = \sin(ax + b)$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{|a|}$: infatti $f(x + \frac{2\pi}{|a|}) = \sin(a(x + \frac{2\pi}{|a|}) + b) = \sin(ax + b \pm 2\pi) = \sin(ax + b) = f(x)$. **(3)** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \operatorname{frac}(x) - \frac{1}{2}$ (ove $\operatorname{frac}(x)$ rappresenta la "parte frazionaria" di x, vedi pag. 48) è dispari e periodica di periodo 1. **(4)** Le funzioni $e^{\sin x}$, $\sin^4(2x)$ e $\log(\cos 2x) + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$ sono tutte periodiche (di periodi rispettivamente 2π, $\frac{\pi}{2}$ e π): in effetti, in esse la variabile x è "trattata per prima" da funzioni periodiche. Ciò non accade in $\sin e^x$ e $\operatorname{tg}\sqrt{1 + x^2}$, che infatti non sono periodiche.

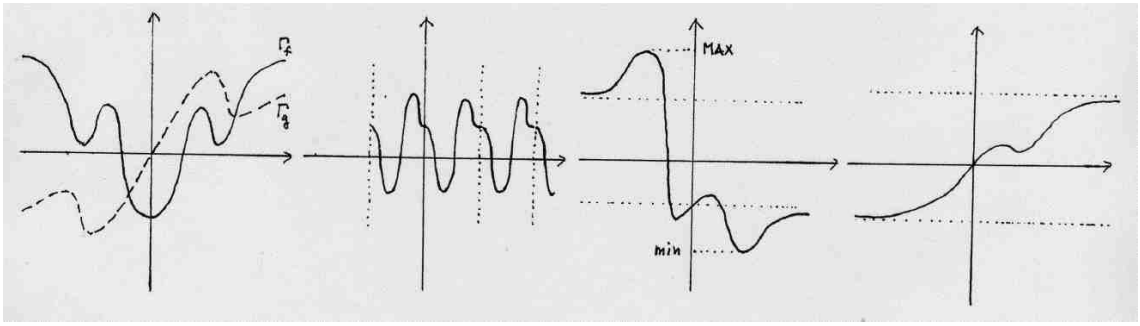

Figura 3.2: Grafico di una funzione pari f e dispari g; grafico di una funzione periodica; grafico di una funzione limitata con massimo e minimo; grafico di una funzione limitata priva sia di massimo che di minimo.

Crescenza e decrescenza, massimi e minimi Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà **Crescenza, estremi**

crescente (risp. *decrescente*) se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ (risp. $f(x_1) \geq f(x_2)$); *strettamente crescente* (risp. *strettamente decrescente*) se tali disuguaglianze sono strette, ovvero se per ogni $x_1, x_2 \in A$ tali che $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ (risp. $f(x_1) > f(x_2)$); il termine *monotòna* significa "crescente oppure decrescente". Se $f(A) \subset \mathbb{R}$ ha il massimo (risp. il minimo), si dirà che f *ammette/assume massimo* (risp. minimo) *assoluto* (o *globale*) *in* A; tali valori, se esistono, vengono detti entrambi *estremi* (assoluti) di f in A. Invece, i punti del dominio in cui tale massimo (risp. minimo) assoluto viene assunto si diranno *punti di massimo* (risp. di minimo) *assoluto* per f in A, ed un punto di massimo (risp. minimo) assoluto si dirà *stretto* se è l'unico punto in cui tale massimo (risp. minimo) assoluto viene assunto. I punti di massimo e minimo assoluto si dicono anche *estremanti* (assoluti) di f in A.[(74)]

Esempi. (0) Se una funzione è costante, tutti i punti del suo dominio sono punti di massimo o minimo assoluto (ovviamente, non stretto). **(1)** Sia $A = \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$: tale funzione non ammette massimo assoluto ma ammette minimo assoluto 0, e $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto (stretto). **(2)** La funzione $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente per $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e strettamente decrescente per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); essa ammette massimo e minimo assoluti (1 e -1), assunti rispettivamente in $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Limitatezza Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dirà *superiormente limitata* su A (risp. *inferiormente limitata* su A) se la sua immagine $f(A)$ è un sottoinsieme superiormente (risp. inferiormente) limitato di $\mathbb{R}$; è chiaro che questa nozione si può riformulare dicendo che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq \alpha$ (risp. $f(x) \geq \alpha$) per ogni $x \in A$. La funzione f si dirà *limitata* se è sia superiormente che inferiormente limitata, e ciò equivale a dire che esiste $M \geq 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in A$. Si ponga attenzione al dominio sul quale si considera la funzione: una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ illimitata può certamente essere limitata se ristretta ad un sottoinsieme di A. **Limitatezza**

Esempi. (0) Una funzione è costante $f(x) \equiv k$ è ovviamente limitata. **(1)** L'esponenziale $f(x) = e^x$ (con $x \in \mathbb{R}$) è inferiormente limitata, (perché $e^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) ma non superiormente limitata. Il logaritmo $g(x) = \log x$ (con $x > 0$ è illimitato sia inferiormente che superiormente. **(2)** Le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \varphi(x)$ (ove $\varphi : A \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione) e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, sono limitate (entrambe sono, in modulo, ≤ 1). **(3)** La funzione $f(x) = x^2$ è inferiormente limitata (da 0) ma superiormente illimitata sul suo dominio naturale $A = \mathbb{R}$; tuttavia, essa diventa limitata se il suo dominio viene ristretto ad un qualsiasi intervallo limitato di $\mathbb{R}$. (Naturalmente, questa proprietà non è caratteristica solo di x^2, come vedremo.)

Funzioni composte con riflessioni, traslazioni, omotetie Se è data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, per ogni $x \in A$ siamo in grado di calcolare il valore $f(x)$. L'effetto del comporre f con la funzione *riflessione* $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m(t) = -t$, ovvero la biiezione che "cambia il segno", l'abbiamo già discusso parlando di funzioni pari e dispari: la funzione opposta $-f(x) : A \to \mathbb{R}$ ha come grafico quello di f riflesso rispetto all'asse x, mentre la funzione **Riflessioni, traslazioni, omotetie**

[(74)] Non si confondano gli "estremanti" (nel dominio) con gli "estremi" (valori del codominio).

$f^r : -A \to \mathbb{R}$ ha come grafico quello di f riflesso rispetto all'asse y.

Sia ora $c \in \mathbb{R}$, e consideriamo la funzione *traslazione* $\tau_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_c(t) = t + c$, ovvero la biiezione che "sposta di c". Si ha allora $(\tau_c \circ f)(x) = f(x) + c$: dunque *il grafico della funzione* $f(x) + c : A \to \mathbb{R}$ *è ottenuto da quello di* f *muovendolo verticalmente verso l'alto di* c (se $c \geq 0$) *o verso il basso di* $|c|$ (se $c < 0$). D'altra parte si ha $(f \circ \tau_c)(x) = f(x + c)$: se il dominio di f è A, per poter calcolare $f(x + c)$ il dominio di $f(x + c)$ dovrà essere $A - c := \{x \in \mathbb{R} : x + c \in A\}$, ovvero ciò che si ottiene muovendo A orizzontalmente verso sinistra di c (se $c \geq 0$) o verso destra di $|c|$ (se $c < 0$). Sul dominio $A - c$, il comportamento di $f(x + c)$ sarà poi identico a quello di f su A: dunque *il grafico della funzione* $f(x + c) : A - c \to \mathbb{R}$ *è ottenuto da quello di* f *muovendolo orizzontalmente verso sinistra di* c (se $c \geq 0$) *o verso destra di* $|c|$ (se $c < 0$).

Sia infine $k > 0$, e consideriamo la funzione biiettiva *omotetìa* $\ell_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell_k(t) = kt$. Si ha allora $(\ell_k \circ f)(x) = k\, f(x)$: dunque *il grafico della funzione* $k\, f(x) : A \to \mathbb{R}$ *è ottenuto da quello di* f *mantenendone inalterata la dimensione orizzontale e dilatandone* (se $k > 1$) *o contraendone* (se $0 < k < 1$) *la verticale del fattore* k. D'altra parte si ha $(f \circ \ell_k)(x) = f(kx)$: anche qui, se il dominio di f è A, per poter calcolare $f(kx)$ il dominio di $f(kx)$ dovrà essere $A/k := \{x/k : x \in A\}$, ovvero ciò che si ottiene dividendo tutti i punti di A per k. L'effetto sul grafico sarà inalterato in verticale, e di restringimento (se $k > 1$) o dilatazione (se $0 < k < 1$) in orizzontale.

3.2 Limiti, continuità e confronto locale

Iniziamo lo studio del comportamento locale di una funzione di variabile reale, introducendo la nozione di *limite*.

3.2.1 Limiti

Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A in $\widetilde{\mathbb{R}}$, e $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Diremo che *$\ell$ è il limite di f per x che tende a c in A*, o che *f tende a ℓ per x che tende a c in A*, scrivendo

Limite

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in A}} f(x) = \ell \qquad := \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{per ogni intorno } V \text{ di } \ell \text{ in } \widetilde{\mathbb{R}} \\ \quad \text{esiste un intorno } U \text{ di } c \text{ in } \widetilde{\mathbb{R}} \\ \quad\quad \text{tale che } f(x) \in V \text{ per ogni } x \in (U \cap A) \setminus \{c\}.\end{array}}$$

Nel seguito, se non necessario, sottointenderemo la notazione "$x \in A$". Si noti che la definizione appena data generalizza quella di limite di una successione (in quel caso era $A = \mathbb{N}$ e $c = +\infty$, l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$).

Proposizione 3.2.1. *La definizione di limite non cambia se U e V sono scelti in una base di intorni rispettivamente di c e ℓ.*

Dimostrazione. Facile esercizio. □

Se $\ell \in \mathbb{R}$ (risp. $\ell = \pm\infty$), si usa anche dire che *f converge a ℓ* (risp. *diverge a $\pm\infty$*); la scrittura "$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$" significherà "$\lim_{x\to c} f(x)$ è uguale a $+\infty$ *oppure* a $-\infty$". Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ si usa dire che f è "*infinitesima* (o "un infinitesimo") per x che tende a c" o "in c", mentre se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ si usa dire che f è *infinita* (o "un infinito") per x che tende a c" o "in c". Usando la Proposizione 3.2.1 esplicitiamo qui di seguito alcuni casi particolari (intenderemo $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$).

Funzione convergente e divergente

Funzione infinitesima e infinita

(i) (Limite finito in punto finito) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ significa:
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; x \in A,\; x \neq x_0,\; |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon\,.$

(ii) (Limite infinito in punto finito) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ significa:
$\forall\, N > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;:\; x \in A,\; x \neq x_0,\; |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \gtrless \pm N\,.$

(iii) (Limite finito in punto infinito) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha$ significa:
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M > 0 \;:\; x \in A,\; x \gtrless \pm M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon\,.$

(iv) (Limite infinito in punto infinito) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ (risp. $= -\infty$) significa:
$\forall\, N > 0 \quad \exists\, M > 0 \;:\; x \in A\,,\; x \gtrless \pm M \quad \Rightarrow \quad f(x) > N \quad$ (risp. $f(x) < -N$).

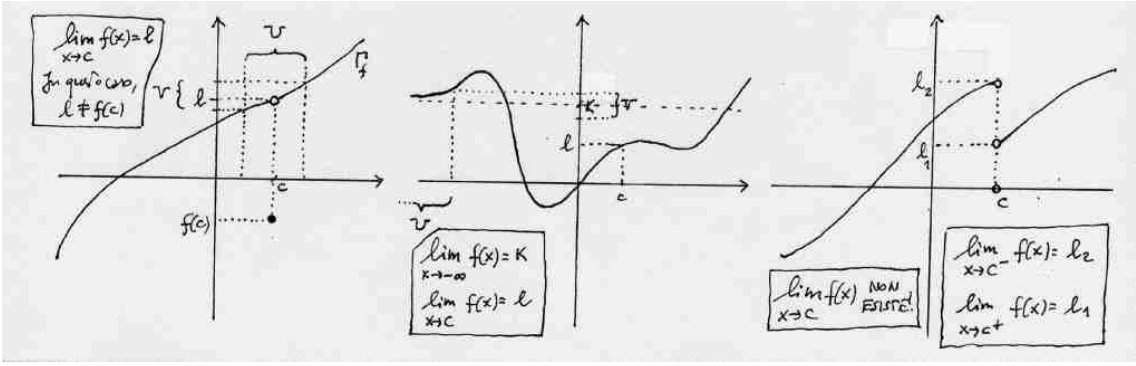

Figura 3.3: Esempi visivi di limiti; limite sinistro e limite destro.

L'uso delle successioni permette una definizione alternativa di limite (si ricordi la Proposizione 2.2.10: un punto c è di accumulazione per A se e solo se esiste una successione di elementi di A diversi da c che tende a c).

Proposizione 3.2.2.

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in A}} f(x) = \ell \qquad \textit{se e solo se} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\text{per ogni successione } x_n \in A \text{ con } x_n \neq c\\ \text{tale che } x_n \to c \text{ si ha } f(x_n) \to \ell\,.\end{array}}$$

Dimostrazione. Necessità: sia $x_n \in A$ una successione di punti di A diversi da c che tende a c, e sia V un intorno di ℓ. Per ipotesi esiste un intorno U di c tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in (A \cap U) \setminus \{c\}$; in corrispondenza esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_U$, ma allora $f(x_n) \in V$ per ogni $n \geq n_U$, ovvero $f(x_n)$ entra definitivamente in V. Questo prova che $f(x_n) \to \ell$, come si voleva. Sufficienza: supponiamo che ℓ non sia limite, dunque che esista V intorno di ℓ tale che per ogni U intorno di c si abbia $f((U \cap A) \setminus \{c\}) \not\subset V$. In particolare ciò accade per gli intorni U_n di una base di intorni di c (se $c \in \mathbb{R}$ sarà $U_n = B_c(\frac{1}{n})$, se $c = +\infty$ sarà $U_n =]n, +\infty[$, se $c = -\infty$ sarà $U_n =]-\infty, -n[$), pertanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere un $x_n \in (U_n \cap A) \setminus \{c\}$ tale che $f(x_n) \notin V$. Ma allora x_n è una successione di punti di A diversi da c che tende a c ma tale che $f(x_n)$ non tende a ℓ (infatti non entra definitivamente in V). □

In altre parole, la nozione di limite significa "ogniqualvolta ci si avvicina (senza andarci sopra) a c con $x \in A$, l'immagine $f(x)$ si avvicina a ℓ". È importante osservare che, nel caso in cui $c \in A$, nella definizione di limite *non c'è a priori alcun legame tra il limite di f in c ed il valore $f(c)$*,[(75)] anche se usualmente (ad esempio per le funzioni elementari) accade che se $c \in A$ sarà $\ell = f(c)$, ovvero, per x che tende a c la funzione $f(x)$ tenderà "docilmente" all'immagine $f(c)$: si parlerà allora, come vedremo in particolare nel prossimo paragrafo, di funzioni *continue*.

[(75)] Un semplice esempio può essere illuminante. Sia $A = \mathbb{R}$, e definiamo $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ -5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$: è ovvio che $\lim_{x\to 0,\ x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$ (infatti, preso $\varepsilon > 0$, ogni $\delta > 0$ fa il servizio richiesto in quanto se $x \neq 0$ allora $|f(x) - 0| = 0 < \varepsilon$), e ciò non dipende per niente dal valore di f in 0, che anziché -5 avrebbe potuto essere qualunque altro numero reale senza per questo cambiare il valore del limite.

Proposizione 3.2.3. *Se* $\lim_{x\to c} f(x)$ *esiste, esso è unico.*

Dimostrazione. Esercizio (adattare quella della Proposizione 2.2.2 per le successioni). □

Esempi. Calcoliamo alcuni limiti servendoci della definizione. **(1)** Se $f|_{A\setminus\{c\}}$ è costante (diciamo $f(x)\equiv k\in\mathbb{R}$ per ogni $x\neq c$) vale ovviamente $\lim_{x\to c,\ x\in A} f(x)=k$. Infatti, preso un intorno V di k, sia $U=\mathbb{R}$: allora $f(U\cap A)\setminus\{c\})=\{k\}\subset V$. **(2)** Sia $A=\mathbb{R}$ e $f(x)=-3x^2+x$, e mostriamo che $\lim_{x\to 1} f(x)=-2$. Sia $\varepsilon>0$, e studiamo le soluzioni della disequazione $|f(x)-(-2)|<\varepsilon$: essa è $|-3x^2+x+2|<\varepsilon$, ovvero $-\varepsilon<-3x^2+x+2<\varepsilon$, ovvero $-\varepsilon<3x^2-x-2<\varepsilon$, ovvero $\begin{cases} 3x^2-x-(2+\varepsilon)<0 \\ 3x^2-x-(2-\varepsilon)>0 \end{cases}$, che dà le soluzioni $\frac{1-\sqrt{25+12\varepsilon}}{6}<x<\frac{1-\sqrt{25-12\varepsilon}}{6}$ e $\frac{1+\sqrt{25-12\varepsilon}}{6}<x<\frac{1+\sqrt{25+12\varepsilon}}{6}$. Il primo dei due è un intorno di 1: basta dunque scegliere un $\delta>0$ tale che $B_1(\delta)$ sia contenuto in tale intorno, e la condizione sarà soddisfatta con $U=B_1(\delta)$. Lo stesso ragionamento mostra che $\lim_{x\to\frac{2}{3}} f(x)=-2$ (si noti che l'altro intervallo è un intorno di $\frac{2}{3}$). **(3)** Sia $A=\mathbb{R}_{<-1}$ e $f(x)=\sqrt{-x-1}$, e mostriamo che $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Dato $a\in\mathbb{R}$, studiamo la disequazione $f(x)>a$: si trova $\sqrt{-x-1}>a$, da cui (possiamo supporre che $a>0$) $x<-\sqrt{a^2+1}$. Quando $a\gg 1$, questa è una semiretta è del tipo $\mathbb{R}_{<b}$, e dunque "è un intorno di $-\infty$ in $\mathbb{R}$: l'asserto è dimostrato. **(4)** Sia $A=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, e $f(x)=\frac{2x}{x-1}$; mostriamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$. Dato $\varepsilon>0$, studiamo la disequazione $|f(x)-2|<\varepsilon$, ovvero $-\varepsilon<\frac{2}{x-1}<\varepsilon$. Poiché $x\to+\infty$, possiamo supporre che $x>1$: la condizione diventa allora $\frac{2}{x-1}<\varepsilon$, che diventa $x>1+\frac{2}{\varepsilon}$. Quando $\varepsilon\ll 1$, questa è una semiretta del tipo $\mathbb{R}_{>b}$, intorno di $+\infty$ in $\mathbb{R}$.

Esaminando la relazione del limite con le restrizioni, si ritrova quanto già detto per successioni e sottosuccessioni (Proposizione 2.2.3).

Proposizione 3.2.4. (Limite delle restrizioni) *Sia* $B\subset A$, *e* $c\in\widetilde{\mathbb{R}}$ *sia di accumulazione anche per* B. *Se esiste* $\ell=\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in A}} f(x)$ *allora esiste anche* $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in B}} f(x)$ *ed è uguale a* ℓ; *viceversa,* $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in B}} f(x)$ *può esistere senza che esista* $\lim\limits_{\substack{x\to c\\ x\in A}} f(x)$.

Dimostrazione. Esista il limite ℓ in A, e sia x_n una successione in B di punti diversi da c che tende a c: allora, poiché x_n è anche una successione in A, si ha che $f(x_n)$ tende a ℓ, come si voleva. Ciò mostra la prima affermazione. Quanto alla seconda, basterebbe ricordare la successione $(-1)^n$ (indeterminata) e le sue sottosuccessioni pari e dispari (con limite 1 e -1 rispettivamente); volendo parlare di qualcosa di nuovo rispetto a quanto già visto, basta pensare ai limiti "destro" e "sinistro" (vedi qui sotto), oppure all'esempio che segue. Siano $A=\mathbb{R}$ e $f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ (la *funzione caratteristica di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$): allora $\lim_{x\to 0,\ x\in A} f(x)$ non esiste, mentre $\lim_{x\to c,\ x\in B} f(x)$ esiste sia prendendo $B=\mathbb{Q}$ che prendendo $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (e tali limiti valgono banalmente 1 e 0). □

Limite destro e sinistro

Un caso particolare è quello del *limite sinistro* e del *limite destro*: se c è un punto di accumulazione risp. di $A_c^-:=A\cap\mathbb{R}_{<c}$ e $A_c^+:=A\cap\mathbb{R}_{>c}$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$, essi saranno definiti come

$$\lim_{\substack{x\to c^-\\ x\in A}} f(x) := \lim_{\substack{x\to c\\ x\in A_c^-}} f(x)\,, \qquad \lim_{\substack{x\to c^+\\ x\in A}} f(x) := \lim_{\substack{x\to c\\ x\in A_c^+}} f(x)\,;$$

in altre parole, per il limite sinistro (risp. destro) si prende in considerazione solo ciò che accade tendendo in A a c dalla parte sinistra (risp. destra), senza occuparsi di ciò che accade dall'altro lato.[76]

Proposizione 3.2.5. $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in A}} f(x)$ *esiste se e solo se* $\lim\limits_{\substack{x \to c^{\mp} \\ x \in A}} f(x)$ *esistono e sono uguali.*

Dimostrazione. La necessità segue dalla Proposizione 3.2.4 (con $B = A^{\pm}$); vediamo la sufficienza. Sia $\ell = \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$: se V è un intorno di ℓ e $U_{\pm}$ sono intorni di c tali che $f((U_{\pm} \cap A_c^{\pm}) \setminus \{c\}) \subset V$, ponendo $U = U_+ \cap U_-$ si ha $(U \cap A) \setminus \{c\} \subset (U_- \cap A_c^-) \cup (U_+ \cap A_c^+)$, da cui si ha[77] $f((U \cap A) \setminus \{c\}) \subset f((U_- \cap A_c^-) \cup (U_+ \cap A_c^+)) = f(U_- \cap A_c^-) \cup f(U_+ \cap A_c^+) \subset V$. □

Esempi. **(1)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$; si ha $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$, dunque di certo $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ di certo non esiste. **(2)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x \le -1 \\ -2x - 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$; si ha $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -2 = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, dunque esiste anche $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$.

Teoremi sui limiti I seguenti risultati generalizzano in modo naturale quelli già incontrati per le successioni. (Negli enunciati, l'espressione "P(x) vale *all'intorno di* c" significa "esiste un intorno U di c in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale che P(x) vale per ogni $x \in U \cap A$".)[78]

Proposizione 3.2.6. *Siano* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ *di accumulazione per* A.

(a) (Limiti delle funzioni monotòne) *Sia* f *crescente e* c *di accumulazione a sinistra* (risp. destra) *per* A: *allora* $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ (risp. $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$) *esiste, ed è uguale a* $\sup\{f(x) : x \in A,\, x < c\}$ (risp. $\inf\{f(x) : x \in A,\, x > c\}$). *Analogamente, se* f *è descrescente vale* $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A,\, x < c\}$ *e* $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A,\, x > c\}$.

(b) (Permanenza del segno) *Se i limiti esistono e vale* $\lim\limits_{x \to c} f(x) < \lim\limits_{x \to c} g(x)$, *allora* $f(x) < g(x)$ *all'intorno di* c *(con* $x \neq c$*).*

In particolare:

Se $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$, *allora* $f(x) > 0$ *all'intorno di* c *(con* $x \neq c$*).*

(c) (Confronto) *Se* $f(x) \le g(x)$ *all'intorno di* c *(con* $x \neq c$*), allora, se i limiti esistono, vale* $\lim\limits_{x \to c} f(x) \le \lim\limits_{x \to c} g(x)$.

In particolare:

Se $f(x) \le \alpha$ *per un certo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *in un intorno di* c *allora, se esiste,* $\lim\limits_{x \to c} f(x) \le \alpha$;

[76] Se $c = +\infty$ (risp. $c = -\infty$) è chiaro che la nozione di limite coincide con quella di limite sinistro (risp. destro), e che la nozione di limite destro (risp. sinistro) è priva di senso.

[77] In generale, se $f : X \to Y$ è una funzione e $A, B \subset X$ si ha $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$: infatti $x \in A \cup B$ se e solo se $x \in A$ oppure $x \in B$, da cui $f(x) \in f(A)$ oppure $f(x) \in f(B)$, cioè $f(x) \in f(A) \cup f(B)$ (e dunque vale "$\subset$"), e viceversa $y \in f(A) \cup f(B)$ se e solo se $y \in f(A)$ oppure $y \in f(B)$, dunque esiste $x' \in A$ tale che $f(x) = y$ oppure esiste $x'' \in B$ tale che $f(x'') \in y$, dunque esiste $x \in A \cup B$ tale che $f(x) = y$, ovvero $y \in f(A \cup B)$ (e dunque vale "$\supset$").

[78] Quando $A = \mathbb{N}$ e $c = +\infty$, la nozione "all'intorno di c" coincide con la già nota "definitivamente".

(d) (Teoremi dei "carabinieri")

(i) *Se* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *all'intorno di* c *e se esistono e sono uguali* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) \in \mathbb{R}$, *anche* $\lim_{x\to c} g(x)$ *esiste in* $\mathbb{R}$ *e sarà uguale ad essi.*

(ii) *Sia* $f(x) \le g(x)$ *all'intorno di* c. *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ *allora* $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$; *se* $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$ *allora* $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$.

(e) (Limiti e operazioni):

(i) *Se esistono* $\ell_1 = \lim_{x\to c} f(x) \in \mathbb{R}$ *e* $\ell_2 = \lim_{x\to c} g(x) \in \mathbb{R}$, *allora esistono anche* $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))$ *e* $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$, *uguali rispettivamente a* $\ell_1+\ell_2$ *e a* $\ell_1\ell_2$.

(ii) *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (risp. $-\infty$) *e* g *è inferiormente* (risp. superiormente) *limitata in un intorno di* c, *allora* $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))$ *esiste ed è uguale a* $+\infty$ (risp. a $-\infty$).

(iii) *Se* f *è infinitesima in* c *e* g *è limitata in un intorno di* c, *allora* fg *è infinitesima in* c.

(iv) *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ *ed esiste* $a > 0$ *tale che* $g(x) > a$ *in un intorno di* c, *allora* $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ *esiste ed è uguale a* $\pm\infty$.

(v) *Se esistono* $\ell_1 = \lim_{x\to c} f(x)$ *e* $\ell_2 = \lim_{x\to c} g(x)$ *e si ha* $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ *e* $\ell_2 \neq 0$, *allora* $\frac{f}{g}$ *è definita all'intorno di* c *ed esiste* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, *uguale a* $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

(vi) *Se* $f(x) > 0$ *all'intorno di* c *e* $\lim_{x\to c} f(x) = 0^+$ (risp. $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$) *allora* $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$ *esiste ed è uguale a* $+\infty$ (risp. 0^+).

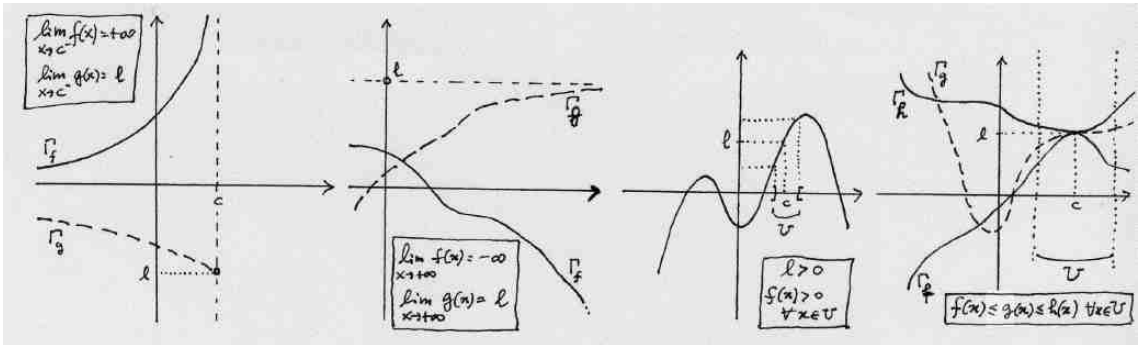

Figura 3.4: Limiti di funzioni monotone in $c \in \mathbb{R}$ e in $+\infty$; permanenza del segno; i due carabinieri.

Dimostrazione. (a) Supponiamo ad esempio che f sia crescente e c di accumulazione a sinistra per A, e denotiamo $\alpha = \sup\{f(x) : x \in A,\, x < c\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $0 < \varepsilon \ll 1$: essendo $\alpha - \varepsilon < \alpha$, esiste $t \in A$ tale che $t < c$ e $f(t) > \alpha - \varepsilon$. Poiché f è crescente, varrà allora $\alpha - \varepsilon < f(t) \le f(x) \le \alpha$ per ogni $x \in]t, c[$, ovvero $f(]t, c[) \subset B_\alpha(\varepsilon)$: ciò mostra che $\lim_{x\to c^-} f(x) = \alpha$. Le altre affermazioni si provano allo stesso modo. (b) Siano $\ell_1 = \lim_{x\to c} f(x)$ e $\ell_2 = \lim_{x\to c} g(x)$ con $\ell_1 < \ell_2$, e siano V_1 e V_2 intorni di ℓ_1 e ℓ_2 rispettivamente con $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (Proposizione 2.1.5), da cui $y_1 < y_2$ per ogni $y_1 \in V_1$ e $y_2 \in V_2$; siano U_1 e U_2 intorni di c tali che $f((U_1 \cap A) \setminus \{c\}) \subset V_1$ e $g((U_2 \cap A) \setminus \{c\}) \subset V_2$. Allora, $U = U_1 \cap U_2$ è un

intorno di c e se $x \in (U \cap A) \setminus \{c\}$ vale $f(x) \in V_1$ e $g(x) \in V_2$, da cui $f(x) < g(x)$. L'altra affermazione si ottiene scegliendo f e g come 0 e f. (c) Siano $\ell_1 = \lim_{x\to c} f(x)$, $\ell_2 = \lim_{x\to c} g(x)$ e supponiamo per assurdo che sia $\ell_1 \not\leq \ell_2$, ovvero $\ell_1 > \ell_2$; per la permanenza del segno esiste un intorno U di c tale che $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in (U \cap A) \setminus \{c\}$, ma ciò è impossibile per ipotesi. (d) Sia x_n una successione in $A \setminus \{c\}$ che converge a c. (i) Per ipotesi le successioni $f(x_n)$ e $h(x_n)$ convergono allo stesso limite finito; allora vi dovrà convergere anche $g(x_n)$, definitivamente compresa tra le due. (ii) Se la successione $f(x_n)$ (risp. $g(x_n)$) diverge a $+\infty$ (risp. a $-\infty$), anche $g(x_n)$ (risp. $f(x_n)$) vi divergerà per confronto. (e) Vediamo ad esempio solo (vi), lasciando le altre come esercizio. Sia $f(x) > 0$ all'intorno di c e $\lim_{x\to c} f(x) = 0^+$: dato $M > 0$ sappiamo che esiste un intorno U di c tale che se $x \in (U \cap A) \setminus \{c\}$ allora $f(x) < \frac{1}{M}$, ma ciò equivale a $\frac{1}{f(x)} > M$. Similmente, se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, dato $\varepsilon > 0$ sappiamo che esiste un intorno U di c tale che se $x \in (U \cap A) \setminus \{c\}$ allora $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$, ma ciò equivale a $\frac{1}{f(x)} < \varepsilon$. □

Esempi. **(1)** Usando (a), si dimostra subito che vale $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \log_a x = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$ (ove $a > 1$ e $\alpha > 0$). **(2)** Sia $f(x) = x - \sin x$: allora $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 - \sin 1$ (per (d-(i)), dando per noto che la funzione $\sin x$ è "continua" in ogni punto $c \in \mathbb{R}$ –come vedremo tra breve– e dunque $\lim_{x\to c} \sin x = \sin c$), e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (per (d-(ii)): $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$ non esiste, ma comunque $\sin x$ è limitata), mentre $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{|x-1|} = +\infty$ (per (d-(iii-v)). **(3)** $\lim_{x\to-\infty}(-x^2 + x) = -\infty$ (per (d-(ii)). **(4)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x(1+x^2)} = 0$ (per (d-(iii-v)).

Forme indeterminate

Dalla Proposizione 3.2.6 restano escluse le stesse *forme indeterminate* già incontrate per le successioni, ovvero $\pm\infty \mp \infty$ (cioè: se ad esempio $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, nulla si può dire in generale su $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x))$), e poi $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, così come altre (tipo 1^∞, 0^0...) che possono essere ricondotte a queste. A tal fine, una cosa utile è il *cambio di variabili* che permette di cambiare, spesso in modo decisivo, l'aspetto di un limite da calcolare.

Cambio di variabili

Proposizione 3.2.7. (Cambio di variabili nei limiti) *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, c* (risp. *p*) *di accumulazione per A* (risp. *B*), *$\phi : B \to A$ una funzione biiettiva tale che $\lim_{t\to p} \phi(t) = c$: allora, $\lim_{x\to c} f(x)$ esiste se e solo se $\lim_{t\to p} f(\phi(t))$ esiste, e i due limiti sono uguali.*[79]

Dimostrazione. Supponiamo esista $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$, e sia V un intorno di ℓ in $\widetilde{\mathbb{R}}$: sappiamo dunque che esiste un intorno U di c in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $f((U \cap A) \setminus \{c\}) \subset V$. Poiché $\lim_{t\to p} \phi(t) = c$, esiste un intorno W di p in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $\phi((W \cap B) \setminus \{p\}) \subset U$; anzi, poiché ϕ è iniettiva, a meno di restringere W si può supporre che $\phi((W \cap B) \setminus \{p\}) \subset U \setminus \{c\}$. Dunque $(f \circ \phi)((W \cap B) \setminus \{p\}) \subset f((U \cap A) \setminus \{c\}) \subset V$, e ciò mostra che anche $\lim_{t\to p} f(\phi(t)) = \ell$. Viceversa, applicando lo stesso ragionamento con $f \circ \phi$ in luogo di f e $(f \circ \phi) \circ \phi^{-1}$ in luogo di $f \circ \phi$, si dimostra che se esiste $\lim_{t\to p,\ t\in B} f(\phi(t))$ allora esiste anche $\lim_{x\to c,\ x\in A}((f \circ \phi) \circ \phi^{-1})(x)$ ed è uguale ad esso; ma $(f \circ \phi) \circ \phi^{-1} = f$. □

[79] Fino a che punto è importante che ϕ sia biiettiva (ovviamente all'intorno di p)? In realtà, osservando la dimostrazione, ci si rende conto che per passare dall'esistenza di $\lim_{x\to c} f(x)$ all'esistenza e uguaglianza di $\lim_{t\to p} f(\phi(t))$ basta supporre che p non sia un punto di accumulazione di $\phi^{-1}(c)$ (vedi più avanti anche la Proposizione 3.2.16). D'altra parte, ecco un esempio che mostra come almeno quest'ultima condizione sia necessaria: se f è definita come $f(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, e $\phi(t) = t \sin \frac{1}{t}$, allora $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ mentre $\lim_{t\to 0} f(\phi(t))$ non esiste. • Invece, se ϕ non è biiettiva, a priori l'esistenza di $\lim_{t\to p} f(\phi(t))$ non assicura esistenza e uguaglianza di $\lim_{x\to c} f(x)$: ad esempio, se $f(x) = \operatorname{sign} x$, $c = 0$, $\phi(t) = t^2$ e $p = 0$ si ha che $\lim_{t\to p} f(\phi(t))$ esiste e vale 1 mentre $\lim_{x\to c} f(x)$ non esiste.

Esempi. (1) Il limite $\lim_{x\to 0^+} x\, e^{\frac{1}{x}}$ è in forma indeterminata $0\cdot\infty$, ma col cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$ (ovvero $x = \phi(t) = \frac{1}{t}$, con $p = +\infty$ e $c = 0$) diventa nella forma $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t}$ (ancora indeterminata perché $\frac{\infty}{\infty}$, ma più presentabile), che studieremo più tardi e che mostreremo valere $+\infty$. **(2)** Il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ è (poiché il logaritmo è continuo, come vedremo tra breve) in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, ma col cambio di variabile $t = \log(1+x)$ (ovvero $x = \phi(t) = e^t - 1$, con $p = c = 0$) diventa nella forma (ancora indeterminata) $\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t-1}$. Più tardi mostreremo che entrambi i limiti valgono 1.

Tuttavia, prima di affrontare il problema del calcolo delle forme indeterminate è forse il caso di completare il bagaglio di risultati che permettono di risolvere facilmente tutte le forme determinate: apriamo dunque una parentesi per occuparci con precisione della nozione di "funzione continua", di cui abbiamo già fatto intravedere il significato di "funzione che non fa salti".

3.2.2 Funzioni continue

Funzione continua (nel punto)

Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, $c \in A$. Diremo che f è *continua in* c se il punto c è isolato oppure, nel caso in cui c sia di accumulazione per A, se $\lim_{x\to c} f(x)$ esiste ed è uguale a $f(c)$: ovvero, se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che se } \ |x-c| < \delta \ \text{ e } \ x \in A \ \text{ allora } \ |f(x) - f(c)| < \varepsilon\,.$$

Un altro modo di enunciare la continuità in c è il seguente:

$$\text{esistono entrambi i limiti } \ f(c^\pm) := \lim_{x\to c^\pm} f(x) \ \text{ e sono uguali a } f(c)\,,$$

oppure questo:

$$\text{per ogni successione } x_n \in A \text{ tale che } \ x_n \to c \ \text{ si ha che } \ f(x_n) \to f(c)\,.$$

È importante notare che la continuità in c è un concetto *locale*, ovvero che si studia solo in un intorno (anche assai piccolo) di c.

Funzione continua (nel dominio)

Se f è continua in ogni punto c del suo dominio A, essa si dirà *continua in* A.

Conviene osservare subito che

Proposizione 3.2.8. *Le funzioni elementari* (modulo, polinomi, esponenziale, logaritmo, potenza, trigonometriche, iperboliche (vedi sotto)) *sono continue in tutto il loro dominio.*

Dimostrazione. Per iniziare, notiamo che una funzione f è continua in c se e solo se $\lim_{x\to c}(f(x)-f(c)) = 0$, il che equivale a $\lim_{x\to c} |f(x) - f(c)| = 0$. • Vediamo la continuità del modulo: da $||x| - |c|| \le |x - c|$ si ricava per confronto che $\lim_{x\to c} ||x|-|c|| - 0$, come si voleva. • Passiamo al logaritmo naturale. Se $c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $0 < \varepsilon < 1$, si ha $|\log x - \log c| < \varepsilon$ se e solo se $|\log(\frac{x}{c})| < \varepsilon$ ovvero, applicando l'esponenziale naturale (crescente) $c\, e^{-\varepsilon} < x < c\, e^{\varepsilon}$: poiché $0 < e^{-\varepsilon} < 1 < e^{\varepsilon}$ questo è un intorno di c, ed allora basterà scegliere $\delta < \min\{c(1-e^{-\varepsilon}), c(e^{\varepsilon}-1)\} = c(1-e^{-\varepsilon})$ affinché $\log(B_c(\delta)) \subset B_{\log c}(\varepsilon)$: ciò mostra che $\lim_{x\to c} \log x = \log c$. • Per l'esponenziale, sia $c \in \mathbb{R}$: dato $\varepsilon > 0$ si ha $|e^x - e^c| = e^c|e^{x-c} - 1|$: ora, posto $t = x - c \neq 0$, da $1 + t \le e^t < \frac{1}{1-t}$ si ricava $x - c \le e^{x-c} - 1 < \frac{1}{1-(x-c)} - 1 = \frac{x-c}{1-(x-c)}$, dunque $\lim_{x\to c}(e^{x-c} - 1) = 0$ per

i due carabinieri, e perciò $\lim_{x\to c}|e^x - e^c| = 0$, il che equivale a $\lim_{x\to c} e^x = e^c$ e dimostra dunque la continuità di e^x in c. • Le potenze x^α, gli esponenziali a^x e i logaritmi $\log_a(x)$ sono ottenuti componendo e operando su esponenziale e logaritmo naturali, dunque sono continui per quanto diremo tra poco nella Proposizione 3.2.9. • Le potenze intere x^n sono continue in ogni $c \in \mathbb{R}$: infatti se $x > 0$ l'abbiamo già detto, se $c = 0$ (nel caso di $n > 0$) si ha $|x^n - 0^n| = |x|^n$ e si usa la continuità del modulo, mentre se $c < 0$ si ha $|x^n - c^n| = |(-1)^n(-x)^n - (-1)^n(-c)^n| = |(-x)^n - (-c)^n|$, e si usa la continuità in $-c > 0$. • Per il seno, si possono usare le formule di prostaferesi: se $c \in \mathbb{R}$ e supponendo $0 < |x - c| \ll 1$ (si noti che $|\sin(t)| \le t$ quando $0 < t \ll 1$) si ha $|\sin x - \sin c| = 2\left|\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right|\left|\sin\left(\frac{x-c}{2}\right)\right| \le \left|\cos\left(\frac{x+c}{2}\right)\right||x-c| \le |x-c|$, e ciò mostra che $\lim_{x\to c}\sin x = \sin c$; per il coseno la verifica è identica; per la tangente e cotangente, vedremo quando avremo a disposizione i teoremi sui limiti. • Infine, la continuità delle funzioni goniometriche inverse (arco-seno, arco-coseno, arco-tangente, arco-cotangente) seguirà da quella delle funzioni goniometriche grazie alla Proposizione 3.2.13. □

Elenchiamo ora alcune delle proprietà elementari delle funzioni continue.

Proposizione 3.2.9. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $c \in A$.*

(a) (Continuità ed operazioni) *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono continue in c, anche $f + g$ e fg lo sono; se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora αf è continua in c; se $g(c) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è definita all'intorno di c ed è continua in c.*

(b) (Permanenza del segno) *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono continue in c e $f(c) < g(c)$ allora $f(x) < g(x)$ in tutto in un intorno di c.*

(c) (Limite di funzioni composte e composizione di funzioni continue) *Sia $B \subset \mathbb{R}$, $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per B e $\phi : B \to A$ una funzione tale che $\lim_{t\to p}\phi(t) = c$. Allora, per ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ continua in c vale $\lim_{t\to p} f(\phi(t)) = f(c)$.*

In particolare:

Se ϕ è continua in p e f è continua in $c = \phi(p)$, allora $f \circ \phi$ è continua in p.

(d) (Restrizioni di funzioni continue sono continue) *Se $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in c, e $c \in B \subset A$, allora $f|_B : B \to \mathbb{R}$ è continua in c.*

Dimostrazione. (a) e (b) discendono immediatamente dalla Proposizione 3.2.6. Per (c), sia $\varepsilon > 0$; essendo f continua in c, esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in A$ e $|x - c| < \delta$ allora $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, per l'esistenza del limite di ϕ, esiste $\gamma > 0$ tale che se $|t - p| < \gamma$ con $t \in B$ e $t \neq p$ allora $|\phi(t) - c| < \delta$: ne consegue che $|f(\phi(t)) - f(c)| < \varepsilon$ che dimostra la tesi. La continuità delle composizioni ne deriva immediatamente. Per (d), basta ricordare la Proposizione 3.2.4. □

Esempi. (0) Le funzioni costanti sono banalmente continue nel loro dominio. **(1)** Come abbiamo visto, le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale; inoltre tutte le funzioni ottenute sommando, moltiplicando, dividendo e componendo tra loro tali funzioni (ad esempio, $\frac{\sin(\sqrt{x^2-\cos x})}{\log_a(\mathrm{tg}\,|\sqrt[3]{x}-2|)}$) sarà continua nel suo dominio naturale . **(2)** La funzione $f = \mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ (se $x < 0$), $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ (se $x > 0$) è continua in ogni $c \neq 0$ (infatti f è costante all'intorno di c) ma non in $c = 0$, perché $f(0^-)$ ed $f(0^+)$ esistono entrambi (valgono rispettivamente -1 e 1) ma sono diversi. **(3)** La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1 \\ -3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ è continua in ogni $c \neq 1$ (infatti all'intorno di c essa è la funzione continua x^2) ma non in $c = 1$, perché $f(1^-)$ ed $f(1^+)$ esistono entrambi e sono uguali tra loro (valgono entrambi 1) ma sono diversi da $f(1) = -3$. **(4)**

La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è continua in $c = 1$? La domanda è priva di senso, perché 1 non sta nel dominio di f!

Esercizio. (1) *Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, e si assuma che f sia continua in c, e g discontinua in c ma limitata all'intorno di c. Si dimostri che:* (i) *se $f(c) = 0$, allora fg è continua in c;* (ii) *se $f(c) \neq 0$, allora fg è discontinua in c.* **(2)** *Discutere la continuità di* $(\sin x)(\operatorname{sign} x)$, $(\cos x)(\operatorname{sign} x)$ *e* $(\sin x)(\chi_{\mathbb{Q}}(x))$.[(80)]

Risoluzione. **(1)** (i) Essendo f continua in c si avrà $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = 0$, ovvero f è infinitesima in c. Essendo g limitata all'intorno di c, si avrà allora $\lim_{x\to c}(fg)(x) = \lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$; ma $(fg)(c) = f(c)g(c) = 0 \cdot g(c) = 0$, e dunque fg è continua in c perché $\lim_{x\to c}(fg)(x) = 0 = (fg)(c)$. (ii) Da $f(c) \neq 0$ e dalla permanenza del segno per funzioni continue ricaviamo che f non si annulla mai all'intorno di c. Se fg fosse continua in c si avrebbe $(fg)(c) = f(c)g(c) = \lim_{x\to c}(fg)(x) = \lim_{x\to c} f(x)g(x)$, e dunque $\frac{\lim_{x\to c} f(x)g(x)}{\lim_{x\to c} f(x)} = \frac{f(c)g(c)}{f(c)} = g(c)$: ma il primo membro è uguale a $\lim_{x\to c} \frac{f(x)g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} g(x)$. Ne desumiamo che $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$, ovvero che g è continua in c: ma ciò contraddice le ipotesi. **(2)** La funzione $(\sin x)(\operatorname{sign} x)$ è continua in tutti i punti $c \in \mathbb{R}$ (se $c \neq 0$ perché sia $f(x) = \sin x$ che $g(x) = \operatorname{sign} x$ lo sono, e se $c = 0$ in base a (1)(i)), mentre la funzione $(\cos x)(\operatorname{sign} x)$ è continua solo nei punti $c \neq 0$ (vedi (1)(ii)). Quanto a $(\sin x)(\chi_{\mathbb{Q}}(x))$, notiamo che $\chi_{\mathbb{Q}}$ è discontinua in tutti i punti di $\mathbb{R}$, e dunque (in base a (1)(i/ii)) la funzione prodotto è continua solo nei punti in cui si annulla $\sin x$, ovvero in $k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Vediamo altre importanti proprietà "globali" delle funzioni continue.

Proposizione 3.2.10. *Siano $A \subset \mathbb{R}$ e $f, g : A \to \mathbb{R}$.*

(a) (Continuità globale) *f è continua in A se e solo se per ogni aperto $V \subset \mathbb{R}$ si ha che $f^{-1}(V)$ è aperto in A per la topologia indotta*[(81)] (ma in realtà basta controllare solo per V intervallo aperto di $\mathbb{R}$)*, o anche se e solo se per ogni chiuso $C \subset \mathbb{R}$ si ha che $f^{-1}(C)$ è chiuso in A per la topologia indotta.*

In particolare:

(i) (Importanti aperti e chiusi di A) *Se f, g sono continue, allora i sottoinsiemi $\{x \in A : f(x) < g(x)\}$ e $\{x \in A : f(x) > g(x)\}$* (risp. $\{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$, $\{x \in A : f(x) \geq g(x)\}$ e $\{x \in A : f(x) = g(x)\}$) *sono aperti* (risp. chiusi) *di A nella topologia indotta; in particolare, se f è continua allora $\{x \in A : f(x) = 0\}$ è un chiuso di A.*

(ii) (Principio di identità): *Se f, g sono continue e coincidono su un sottoinsieme denso di A* (ovvero, posto $D = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ vale $A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} D = A$)*, allora esse sono uguali.*

(b) (Immagini continue di intervalli sono intervalli) *Se f è continua e A è un intervallo, allora anche $f(A)$ è un intervallo.*

[(80)] $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la "funzione segno" definita da $\operatorname{sign} x = 1$ se $x > 0$, $\operatorname{sign} 0 = 0$ e $\operatorname{sign} x = -1$ se $x < 0$, mentre in generale, dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$, $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la "funzione caratteristica di A in $\mathbb{R}$" definita da $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e da $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$.

[(81)] Su ogni sottoinsieme A di uno spazio topologico X (e qui $X = \mathbb{R}$, oppure $X = \widetilde{\mathbb{R}}$) resta definita una *topologia indotta* per la quale gli aperti di A saranno, per definizione, i sottoinsiemi di A che si possono esprimere come $A \cap U$ per qualche aperto U di X, e perciò i chiusi di A saranno i sottoinsiemi di A che si possono esprimere come $A \cap C$ per qualche chiuso C di X.

Corollario:

(Teorema di tutti i valori, o degli zeri) *Siano* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e* $[a, b]$ *un intervallo compatto in* A. *Si abbia (ad esempio)* $f(a) < f(b)$*: allora per ogni* $\eta \in]f(a), f(b)[$ *esiste* $\xi \in]a, b[$ *tale che* $f(\xi) = \eta$.
In particolare, se $f(a) < 0$ *e* $f(b) > 0$ (o viceversa) *esiste* $x \in]a, b[$ *tale che* $f(x) = 0$.

(c) (Continuità delle funzioni monotòne) *Se* A *è un intervallo, una funzione monotòna* (ovvero, crescente oppure decrescente) $f : A \to \mathbb{R}$ *è continua se e solo se* $f(A)$ *è un intervallo.*

(d) (Immagini continue di compatti sono compatti) *Se* A *è compatto* (ovvero, chiuso e limitato) *e* $f : A \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, allora anche* $f(A)$ *è compatto.*

Corollario:

(Teorema di Weierstrass) *Se* A *è compatto, ogni funzione continua* $f : A \to \mathbb{R}$ *ammette massimo e minimo assoluti in* A. (In particolare, ogni funzione continua su un compatto è limitata.)

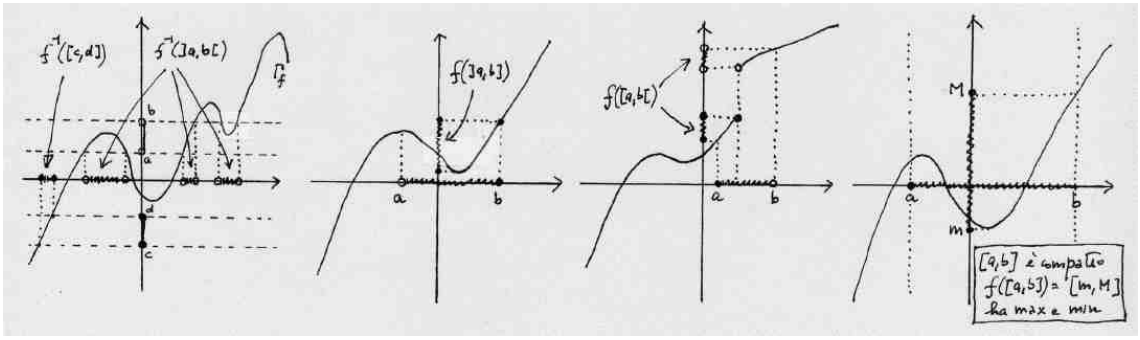

Figura 3.5: Antiimmagini di aperti (risp. chiusi) tramite funzioni continue sono aperti (risp. chiusi) del dominio; l'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è un intervallo; l'immagine di un intervallo tramite una funzione discontinua può non essere un intervallo; il teorema di Weierstrass.

Dimostrazione. (a) Sia f continua in A, e V un aperto di $\mathbb{R}$: preso un qualsiasi $c \in f^{-1}(V)$, poiché V è intorno di $f(c)$ esisterà $\delta_c > 0$ tale che $f(B_c(\delta_c) \cap A) \subset V$, ovvero $B_c(\delta_c) \cap A \subset f^{-1}(V)$. Posto $U = \bigcup_{c \in f^{-1}(V)} B_c(\delta_c)$ si ha dunque $f^{-1}(V) = A \cap U$, e ciò mostra che $f^{-1}(V)$ è aperto in A. Viceversa, siano $c \in A$ e V un intorno di $f(c)$: cerchiamo un intorno U di c in $\mathbb{R}$ tale che $f(U \cap A) \subset V$. Poiché $f^{-1}(V)$ è aperto in A e $c \in f^{-1}(V)$, esisterà $\delta > 0$ tale che $B_c(\delta) \cap A \subset f^{-1}(V)$, ma allora, posto $U = B_c(\delta)$, si ha $f(B_c(\delta) \cap A) \subset f(f^{-1}(V)) \subset V$. Ciò prova che f è continua in c, e poiché c è un qualsiasi punto di A, che f è continua in A. È sufficiente verificare la condizione solo quando V è un intervallo di $\mathbb{R}$ perché un qualsiasi aperto di $\mathbb{R}$ è unione di intervalli e dunque...; poi, C è un chiuso di $\mathbb{R}$ se e solo se $V = \complement_{\mathbb{R}} C$ è un aperto di $\mathbb{R}$... (completare le dimostrazioni per esercizio). Per (i), si osservi ad esempio che $\{x \in A : f(x) < g(x)\} = (f - g)^{-1}(]-\infty, 0[)$: essendo $f - g$ continua e $]-\infty, 0[$ aperto di $\mathbb{R}$, anche $(f - g)^{-1}(]-\infty, 0[) = \{x \in A : f(x) < g(x)\}$ è aperto di A. Per (ii), si ha $D = (f - g)^{-1}(0)$: essendo $f - g$ continua, per (i) si ha allora che D è chiuso in A, ovvero $A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} D = D$: ma D è denso in A, e allora $A \cap \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} D = A$. Si ricava allora $D = A$, ovvero $f = g$. (b) Siano $x_1, x_2 \in A$, tali che $f(x_1) < f(x_2)$; diciamo che sia ad esempio $x_1 < x_2$ (l'altro caso si mostra in modo del tutto analogo). Se mostriamo che, preso un qualsiasi $\eta \in]f(x_1), f(x_2)[$ nel codominio, esiste $\xi \in]x_1, x_2[$ tale che $f(\xi) = \eta$, avremo terminato. Definiamo

$A_+ = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) \geq \eta\}$ e $A_- = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) \leq \eta\}$: come visto in precedenza, essi sono chiusi di $[x_1, x_2]$, e dunque (essendo $[x_1, x_2]$ chiuso in $\mathbb{R}$) chiusi anche in $\mathbb{R}$: pertanto (vedi Proposizione 2.1.4) ad esempio A_+ ammetterà minimo, che chiameremo ξ. Poiché $\xi \in A_+$ si avrà $f(\xi) \geq \eta$; in particolare $x_1 \lneqq \xi$, e allora (essendo $\xi = \min A_+$) sarà $[x_1, \xi[\subset A_-$; ne segue che ξ è di accumulazione per A_-, ma quest'ultimo è chiuso, e dunque $\xi \in A_-$, ovvero $f(\xi) \leq \eta$. Essendo $f(\xi) \geq \eta$ e $f(\xi) \leq \eta$, non può che essere $f(\xi) = \eta$, come richiesto. Il Teorema di tutti i valori (o degli zeri) è una diretta conseguenza: l'immagine di $[a, b]$ è essa stessa un intervallo, che deve contenere in particolare $f(a)$ e $f(b)$, dunque deve contenere anche ogni elemento η compreso tra essi, ma ciò significa per l'appunto che esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = \eta$. (c) Come visto, la condizione è necessaria; vediamo la sufficienza, supponendo ad esempio che f sia crescente. Preso un qualsiasi $c \in A$, ricordiamo che dalla Proposizione 3.2.6(a) si ha $f(c^-) = \sup\{f(x) : x < c\}$ e $f(c^+) = \inf\{f(x) : x > c\}$ e perciò dalla crescenza di f si ha $f(c)^- \leq f(c) \leq f(c)^+$. Ora, se fosse $f(c^-) < f(c)$, i valori in $]f(c^-), f(c)[$ non potrebbero essere assunti da f, ovvero, non potrebbero stare nell'immagine di f (infatti, se esistesse $x \in A$ tale che $f(c^-) < f(x) < f(c)$, da $f(x) < f(c)$ si avrebbe $x < c$, ed allora dovrebbe essere $f(c^-) \geq f(x)$, assurdo); analogamente, se fosse $f(c) < f(c^+)$ i valori in $]f(c), f(c^+)[$ non potrebbero essere assunti da f. Ma entrambe queste eventualità sono impossibili, in quanto $f(A)$ è un intervallo. Pertanto $f(c^-) = f(c) = f(c^+)$, e ciò mostra che f è continua in c. Infine, per dimostrare (d) ricordiamo (vedi Proposizione 2.2.10) che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto. Sia dunque A compatto, e consideriamo una successione y_n in $f(A)$: si potranno allora scegliere degli $x_n \in A$ tali che $y_n = f(x_n)$. Ora A è per ipotesi compatto, dunque esiste una sottosuccessione x_{n_k} di x_n che converge a un certo $x_0 \in A$: ma allora, essendo f continua, si ha che $f(x_{n_k})$ converge a $f(x_0) \in f(A)$, come si voleva. Il teorema di Weierstrass ne segue subito ricordando la Proposizione 2.1.4. □

Esempi. **(1)** Anche senza calcolare chi siano, già sappiamo che $A = \{x \in \mathbb{R} : 3\sin x > \sqrt{1 + x^2}\}$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}$, mentre $B = \{x \in]0, 1[: 2x \geq \frac{1}{4x^2}\}$ è un chiuso di $]0, 1[$ (e dunque essendo $]0, 1[$ non chiuso in $\mathbb{R}$, non si può dire se B sia chiuso in $\mathbb{R}$ oppure no). Usando un confronto grafico non è difficile rendersi conto, infatti, che $A =]a, b[$ per certi $0 < a < \frac{\pi}{2} < b < \pi$ e che $B = [\frac{1}{2}, 1[$ (non chiuso in $\mathbb{R}$). **(2)** Consideriamo la funzione $\log_a(2\sin x + \sqrt{3})$ con $a > 1$: essa sarà continua nel suo dominio $\{x \in \mathbb{R} : 2\sin x + \sqrt{3} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$. Poiché $f(\frac{5\pi}{4}) = \log_a(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < 0$ e $f(\pi) = \log_a(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\log_a 3 > 0$, già sappiamo che esiste $\xi \in]\pi, -\frac{5\pi}{4}[$ tale che $f(\xi) = 0$: in effetti, da $f(x) = 0$ si ricava $\sin x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, ovvero $x = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2k\pi$ oppure $x = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), e $\xi = \pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ effettivamente sta in $]\pi, -\frac{5\pi}{4}[$. **(3)** La funzione $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è strettamente crescente (ovvero se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$) e la sua immagine $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\leq 1} \cup \mathbb{R}_{>0}$ non è un intervallo: dunque essa non può essere continua su tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ (infatti è continua in ogni punto do $\mathbb{R}$ tranne che in $c = 0$, ove si ha $f(0^-) = f(0) = -1 \neq f(0^+) = 0$). **(4)** La funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x$ non ammette massimi e minimi assoluti in $\mathbb{R}$ (infatti, come vedremo, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$) ma, poiché $A = [-1, \frac{3}{2}]$ è compatto, in base al Teorema di Weierstrass la restrizione $f|_A : A \to \mathbb{R}$ avrà minimo α e massimo β, ove $f(A) = [\alpha, \beta]$. Ma... come calcolare l'intervallo $f(A)$, e come capire, poi in quali punti di A tali estremi vengono assunti (cioè, quali sono "i punti di massimo e minimo assoluto di f su A")? Effettivamente, per ora i nostri mezzi sono ancora limitati, e non possiamo rispondere: al più, provando a disegnare il grafico di f (che è una cubica), ci possiamo accorgere che essa si annulla per $x = 0, 1, \frac{8}{3}$, ha un massimo locale tra 0 e 1 ed un minimo locale tra 1 e $\frac{8}{3}$. Quando saremo più dotati di strumenti (più precisamente, dopo aver studiato la derivabilità) potremo verificare che f è crescente fino a $x = \frac{4}{9}$ e dopo $x = 2$, e decrescente tra $\frac{4}{9}$ e 2, e che dunque essa ha un massimo locale in $x = \frac{4}{9}$ (con valore $\frac{400}{243} \sim 1,6$) ed un minimo locale in $x = 2$ (con valore -4); essendo $f(-1) = -22$ e $1 < \frac{3}{2} < 2$ ne deduciamo che $f(A) = [-22, \frac{400}{243}]$, da cui il minimo (risp. massimo) assoluto di f su A è $\alpha = -22$ (assunto in $x = -1$) e $\beta = \frac{400}{243}$ (assunto in $x = \frac{4}{9}$).

Esercizio. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$. Dimostrare che f ha massimo.*

Risoluzione. Per ipotesi, esiste un $M > 0$ tale che $f(x) < f(0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| > M$. In base al Teorema di Weierstrass, la restrizione di f (continua) al sottoinsieme compatto $[-M, M]$ ammette massimo α, ovvero $f(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| \leq M$ ed esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ con $|x_0| \leq M$ per cui $f(x_0) = \alpha$. Ora poiché $0 \in [-M, M]$ si ha senz'altro $f(0) \leq \alpha$ e dunque anche $f(x) < \alpha$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $|x| > M$: riassumendo, vale $f(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui $f(x_0) = \alpha$. Cioè, α è il massimo di f.

Lipschitzianità Esaminiamo ora una proprietà più forte della continuità: si ponga attenzione al fatto che essa è *globale* sul dominio.

Funzione lipschitziana

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è *lipschitziana* su A se esiste $L \geq 0$ (detta *costante di Lipschitz di f su A*)[82] tale che

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''| \qquad \text{per ogni } x', x'' \in A,$$

o analogamente tale che

$$\left|\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''}\right| \leq L \qquad \text{per ogni } x', x'' \in A \text{ con } x' \neq x''.$$

L'idea della lipschitzianità è più evidente nella sua seconda formulazione (si noti che il *rapporto incrementale* $\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}$ esprime il coefficiente angolare della retta che congiunge i punti $(x', f(x')$ e $(x'', f(x'')$ del grafico di f): si richiede che "la pendenza del grafico non diventi arbitrariamente grande", ovvero che sia limitata da una costante che dipenderà ovviamente sia da f che da A.

Proposizione 3.2.11. *Una funzione lipschitziana su A è anche continua su A.*

Dimostrazione. Sia L una costante di Lipschitz di f su A. Se $c \in A$ e $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ affinché se $|x - c| < \delta$ allora $|f(x) - f(c)| \leq L|x - c| \leq \varepsilon$. Dunque f è continua in c. □

Esempi. **(1)** La funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = \sin x$ e $g(x) = -5|x|$ sono lipschitziane: Infatti $|f(x') - f(x'')| = 2|\cos(\frac{x'+x''}{2})\sin(\frac{x'-x''}{2})| \leq 2|\cos(\frac{x'+x''}{2})|\frac{|x'-x''|}{2} = |\cos(\frac{x'+x''}{2})||x' - x''| \leq 1|x' - x''|$, e $|g(x') - g(x'')| = 5||x'| - |x''|| \leq 5|x' - x''|$: le pendenze sono controllate rispettivamente dalle costanti $L_f = 1$ e $L_g = 5$. **(2)** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ è continua ma non è lipschitziana: infatti la pendenza del grafico tende a ∞ (rigorosamente, preso un qualsiasi $L > 0$, se $x' = 0$ e $x'' > L$ si ha $\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right| = |x''| > L$). Invece, se si restringe f ad un intervallo compatto (diciamo ad esempio $[-1, 2]$) essa diventa lipschitziana perché se $x', x'' \in [-1, 2]$ vale $|f(x'') - f(x')| = |x' + x''||x' - x''| \leq 4|x' - x''|$. **(3)** Allora si potrebbe pensare che una funzione continua sia lipschitziana su ogni compatto contenuto nel dominio: ma ciò è falso. Ad esempio, la funzione continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \sqrt{x}$ non è lipschitziana (si ha $\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right| = \frac{1}{|\sqrt{x'}+\sqrt{x''}|}$ e pertanto, preso un qualsiasi $L > 0$, se ad esempio $x' = 0$ e $0 < x'' < \frac{1}{L^2}$ allora $\left|\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''}\right| > L$.

[82] In realtà non è difficile mostrare che esiste *la* costante di Lipschitz L_A di f su A, che è il minimo numero ≥ 0 che soddisfa la condizione di Lipschitz per f su A.

Tipi di discontinuità Se $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $c \in A$ (necessariamente di accumulazione per A) in cui f non è continua si dirà *punto di discontinuità*. Se entrambi i limiti $f(c^{\pm}) = \lim_{x \to c^{\pm}} f(x)$ esistono finiti (ovvero, in $\mathbb{R}$) ma non vale $f(c^-) = f(c^+) = f(c)$ si parlerà di *discontinuità di prima specie* o *di salto* (il numero $f(c^+) - f(c^-)$ è infatti chiamato "salto di f in c); in particolare, se $f(c^-) = f(c^+)$ ma $f(c)$ è diversa dal loro valore comune si dirà che c è una *discontinuità eliminabile* perché basterebbe modificare il valore $f(c)$ per rendere f continua in c. In tutti gli altri casi si dice che c è una *discontinuità di seconda specie*, o *essenziale*.

Punto di discontinuità

A tal proposito, è utile parlare anche di

Proposizione 3.2.12. (Prolungamento per continuità) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in A; definiamo $\widetilde{A}_f = \{x \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}} A : \text{esiste } \lim_{x \to c,\ x \in A} f(x) \text{ finito}\}$. Allora la funzione $\tilde{f} : \widetilde{A}_f \to \mathbb{R}$ definita da $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \lim_{x \to c} f(x) & \text{se } x \in \widetilde{A}_f \setminus A \end{cases}$ è continua in $\widetilde{A}_f$.*

Dimostrazione. Sia $c \in \widetilde{A}_f$, e sia $\varepsilon > 0$; vogliamo mostrare che esiste $\delta > 0$ tale che $\tilde{f}(\widetilde{A}_f \cap B_c(\delta)) \subset B_{\tilde{f}(c)}(\varepsilon)$. Ora, sia nel caso in cui $c \in A$ che in quello in cui $c \in \widetilde{A}_f \setminus A$, esiste $\delta > 0$ tale che $f(A \cap B_c(\delta)) \subset B_{\tilde{f}(c)}(\frac{\varepsilon}{2})$: basterà far vedere che tale δ soddisfa alla nostra richiesta iniziale. Sia dunque $p \in \widetilde{A}_f \cap B_c(\delta)$ e notiamo che, essendo il limite una nozione locale, si ha $\tilde{f}(p) = \lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to p \\ x \in A \cap B_c(\delta)}} f(x)$. Ma allora, poiché $\tilde{f}(c) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < \tilde{f}(c) + \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $x \in A \cap B_c(\delta)$, passando al limite per $x \to p$ con $x \in A \cap B_c(\delta)$ (e applicando il Teorema del Confronto tra $f(x)$ e le funzioni costanti $\tilde{f}(c) \pm \frac{\varepsilon}{2}$) si ottiene $\tilde{f}(c) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \tilde{f}(p) \leq \tilde{f}(c) + \frac{\varepsilon}{2}$, ovvero $\tilde{f}(p) \in \overline{B}_{\tilde{f}(c)}(\frac{\varepsilon}{2}) \subset B_{\tilde{f}(c)}(\varepsilon)$, che è quanto si voleva dimostrare. □

Esempi. **(1)** La già vista funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 1 \\ -3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ ha una discontinuità eliminabile in $x = 1$ (basterebbe modificare $f(1)$ da -3 a 1); idem per $f(x) = \mathrm{sign}^2 x$ data da $f(x) = 1$ (se $x \neq 0$) e $f(0) = 0$. Invece $f(x) = \mathrm{sign}\, x$ (data, come detto, da $f(x) = -1$ se $x < 0$, $f(0) = 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$) e $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ hanno una discontinuità di prima specie in 0 con salti rispettivamente 2 e -5. **(2)** Le funzioni $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ (in cui $\lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \pm\infty$) e $g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (in cui $\lim_{x \to 0} g(x)$ non esiste, perché "se x tende a 0 $g(x)$ oscilla sempre più velocemente tra -1 e 1") sono discontinuità di seconda specie. **(3)** La funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ ha come dominio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$; tuttavia, poiché chiaramente $\lim_{x \to -2} f(x) = -4$, si può prolungare f per continuità anche in -2 ponendola uguale a -4. Idem per $g(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ e $h(x) = \frac{\sin x}{x}$, che hanno dominio $\mathbb{R}^{\times} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$: poiché, come si vedrà meglio tra breve tornando a parlare di limiti, si ha $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} h(x) = 1$, esse si possono prolungare per continuità anche in 0 con tali valori.

Omeomorfismo Se $A, B \subset \mathbb{R}$, un *omeomorfismo* tra A e B è una funzione biiettiva $f : A \to B$ continua e con inversa $f^{-1} : B \to A$ pure continua. In tal caso A e B si diranno "omeomorfi": il significato è che, topologicamente, essi sono "indistinguibili a meno del dizionario f che traduce l'uno nell'altro", ed è chiaro che l'essere omeomorfi dà una relazione d'equivalenza in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Omeomorfismo

Esempio. **(1)** Due intervalli "dello stesso tipo" (ovvero entrambi aperti/chiusi/semichiusi e limitati, o entrambi semirette aperte/chiuse) sono sempre omeomorfi: ad esempio, $A = [a, b[$ e $B =]c, d]$ sono omeo-

morfi tramite $f : A \to B$, $f(x) = -\frac{(d-c)x+ac-bd}{b-a}$ (che "sovrappone A a B rovesciandolo e modificandone la lunghezza"), la cui inversa è $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(y) = -\frac{(b-a)y+ac-bd}{d-c}$. **(2)** Ma può accadere che siano omeomorfi anche dei sottoinsiemi che a prima vista non sembrano avere molto a che fare l'uno con l'altro: ad esempio, la funzione tg $:]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}$ è un omeomorfismo tra $A =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e $B = \mathbb{R}$ (è biiettiva e continua, con inversa arctg $: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ pure continua). **(3)** Si faccia attenzione al fatto che, in generale, non è detto che una funzione biiettiva e continua abbia anche inversa continua: l'esempio classico è quello in cui $A = \mathbb{R}_{<-1} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_{>1}$, $B = \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ data da $f(x) = x - \operatorname{sign} x$, in cui $f^{-1}(y) = y + \operatorname{sign} y$ non è continua, avendo un salto $f^{-1}(0^+) - f^{-1}(0^-) = 2$ in $y = 0$. Tuttavia, se A è un intervallo non accadono tali sorprese, come mostra la seguente Proposizione.

La seguente importante proposizione lega tra loro l'iniettività e la crescenza.

Proposizione 3.2.13. *Sia A un intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è iniettiva se e solo se essa è strettamente monotona, ed in tal caso essa induce un omeomorfismo tra A e $B = f(A)$* (che sarà dunque anch'esso un intervallo).

Dimostrazione. Della prima parte dell'enunciato (cioè del fatto che una funzione continua su un intervallo è iniettiva se e solo se è strettamente monotona) daremo due dimostrazioni: la prima più intuitiva ma che richiede cura per essere resa rigorosa, la seconda più indiretta ma anche più pulita. • (Prima dimostrazione) Se f è strettamente monotona, essa è ovviamente iniettiva; ci resta da mostrare l'implicazione inversa, cioè che se f non è strettamente monotona, essa non può essere iniettiva. A tal fine, seguiremo l'idea intuitiva che "una funzione continua che va un po' su e un po' giù, oppure un po' giù e un po' su, deve assumere più volte lo stesso valore"; il problema è di rendere rigorosa tale idea. In effetti, dire che f non è strettamente monotona è come dire che non è ne' strettamente crescente ne' strettamente decrescente, ovvero che esistono $a, b \in A$ tali che $a < b$ e $f(b) \le f(a)$ e che esistono $a', b' \in A$ tali che $a' < b'$ e $f(a') \le f(b')$; con un po' di lavoro, si dimostra che ciò equivale all'esistenza di $\alpha, \beta, \gamma \in A$ tali che $\alpha < \beta < \gamma$ e $\begin{cases} f(\beta) \le f(\alpha) \\ f(\beta) \le f(\gamma) \end{cases}$ oppure $\begin{cases} f(\alpha) \le f(\beta) \\ f(\gamma) \le f(\beta) \end{cases}$.[(83)] Ebbene, una tale funzione non può essere iniettiva. Se infatti valesse una delle due situazioni con almeno un'uguaglianza (ad esempio la prima graffa con $f(\beta) = f(\alpha)$) ciò sarebbe evidente, mentre se valesse una delle due situazioni con disuguaglianze strette, ad esempio la prima graffa con $f(\beta) < f(\alpha)$ e $f(\beta) < f(\gamma)$, scelto un valore intermedio η tra $f(\beta)$ e $\min\{f(\alpha), f(\gamma)\}$, per il teorema di tutti i valori (vedi Proposizione 3.2.10(b)) dovrebbero esistere $\xi_1, \xi_2 \in A$ con $\alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$ tali che $f(\xi_1) = f(\xi_2) = \eta$, negando ancora l'iniettività. • (Seconda dimostrazione) Siano (a, b) e (c, d) due punti qualsiasi del triangolo $D_A = \{(x_1, x_2) \in A \times A : x_1 < x_2\}$: quando t varia in $[0, 1]$, il punto $(a + t(c - a), b + t(d - b))$ del piano $\mathbb{R}^2$ percorre il segmento che congiunge nel piano i punti (a, b) e (c, d) e, essendo A un intervallo, tale segmento sarà tutto contenuto in D_A. Consideriamo la funzione $g_{(a,b),(c,d)} : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g_{(a,b),(c,d)}(t) = f(b+t(d-b)) - f(a+t(c-a))$, chiaramente continua perché somma di composizioni di funzioni continue. Ora, f è iniettiva se e solo se tutte le funzioni $g_{(a,b),(c,d)}$ non si annullano mai; per il Teorema degli zeri, ciò accade se e solo se esse saranno sempre > 0 oppure sempre < 0, ma ciò può accadere se e solo se esse avranno tutte lo stesso segno (perché se, ad esempio, fosse $g_{(a,b),(c,d)} > 0$ e $g_{(a',b'),(c',d')} < 0$, la funzione $g_{(a,b),(a',b')}$ sarebbe > 0 per $t = 0$ e < 0 per $t = 1$ e dunque, sempre per il Teorema degli zeri, dovrebbe esserci qualche punto del segmento tra i due punti in cui essa si annulla, impossibile); ma ciò significa, rispettivamente, che f è strettamente crescente o strettamente decrescente.
Passiamo ora alla seconda parte dell'enunciato (quella sull'omeomorfismo). Posto $B := f(A)$ (che per la Proposizione 3.2.10(b) è un intervallo), la corestrizione $f|^B : A \to B$ è biiettiva, e si può definire l'inversa $(f|^B)^{-1} : B \to A$, che sarà pure essa strettamente monotona[(84)]: ma allora, essendo l'immagine di $(f|^B)^{-1}$

[(83)] Si può ragionare caso per caso a seconda delle posizioni relative di a, b, a', b'. Così, quando $a' < b' < a < b$, se $f(b') \le f(a)$ si scelgano $(\alpha, \beta, \gamma) = (a', a, b)$, mentre se $f(b') > f(a)$ si scelgano $(\alpha, \beta, \gamma) = (a', b', a)$; quando $a' < b' = a < b$ si scelgano $(\alpha, \beta, \gamma) = (a', b', b)$; quando $a' < a < b' < b$, se $f(a') > f(a)$ si scelgano $(\alpha, \beta, \gamma) = (a', a, b')$, mentre se $f(a') \le f(a)$ si scelgano $(\alpha, \beta, \gamma) = (a', a, b)$; eccetera.
[(84)] È immediato vedere (esercizio) che l'inversa di una funzione biiettiva $f : C \to D$ (con $C, D \subset \mathbb{R}$)

un intervallo (è A), per la Proposizione 3.2.10(c) la funzione $(f|^B)^{-1}$ è continua, ovvero $f|^B : A \to B$ è un omeomorfismo.

□

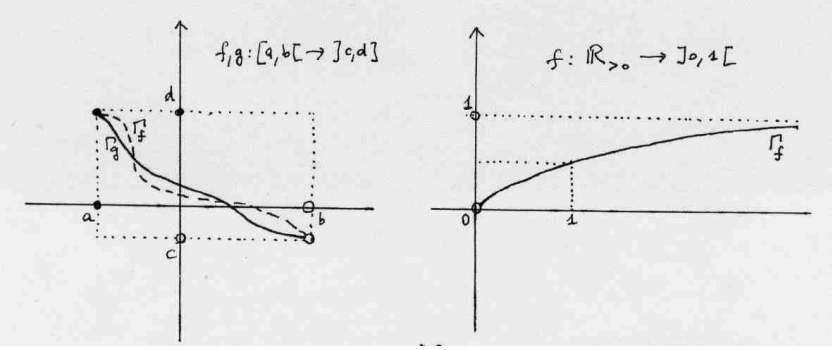

Figura 3.6: Gli intervalli $[a, b[$ e $]c, d]$ sono omeomorfi (le funzioni f e g sono due possibili omeomorfismi); la funzione $f(x) = \frac{x}{x+1}$ è un omeomorfismo tra $\mathbb{R}_{>0}$ e $]0, 1[$.

Esempi. Era rimasta in sospeso la questione della continuità delle funzioni goniometriche inverse, che affrontiamo ora. **(1)** Esaminiamo ad esempio le funzioni $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ e $\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$: esse sono continue e strettamente monotone (risp. strettamente crescente e decrescente), e dunque costituiscono un omeomorfismo tra il loro dominio (intervallo) e l'immagine (che è $[-1, 1]$): ne desumiamo in particolare che *le loro inverse* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *e* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ *sono continue*. **(2)** Ancora più interessante è il caso di $\mathrm{tg} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$: e $\mathrm{cotg} :]0, \pi[\to \mathbb{R}$: esse sono continue e strettamente monotone (risp. strettamente crescente e decrescente), e dunque costituiscono un omeomorfismo tra il loro dominio (intervallo) e l'immagine (che è $\mathbb{R}$): perciò *le loro funzioni inverse* $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *e* $\mathrm{arccotg} : \mathbb{R} \to]0, \pi[$ *sono continue*, e mostrano che $\mathbb{R}$ *è omeomorfo ad uno* (e dunque ad ogni) *suo intervallo aperto e limitato*. Così, ad esempio, componendo con l'omeomorfismo naturale tra $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $]-1, 1[$ visto poco fa, otteniamo un omeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ ponendo $\phi(x) = \frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}\, x$; un altro omeomorfismo tra gli stessi spazi è però anche $\psi : \mathbb{R} \to]-1, 1[$, $\psi(x) = \frac{x}{|x|+1}$ (anche questa è una funzione continua e strettamente crescente con dominio l'intervallo $\mathbb{R}$ ed immagine $]-1, 1[$).

3.2.3 Limiti (ripresa), forme indeterminate e limiti notevoli

Dopo aver studiato le funzioni continue, possiamo ora tornare al problema originale del calcolo dei limiti. La combinazione dei teoremi sui limiti (Proposizione 3.2.6) e le proprietà delle funzioni continue, particolarmente il limite delle composizioni con funzioni continue (vedi Proposizione 3.2.9) danno modo di risolvere immediatamente i limiti in forma determinata.

Esempi. **(0)** Per ogni $a > 0$ si ha $\lim_{x \to +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$ (infatti quando $x \to +\infty$ si ha $\frac{1}{x} = 0^+$, e dunque (l'esponenziale è continuo!) $a^{\frac{1}{x}} \to a^{0^+} = 1^+$); si ha $\lim_{x \to 1^\pm} \mathrm{arctg}(\frac{1}{1-x}) = \mp\frac{\pi}{2}$ (infatti quando $x \to 1^\pm$ si

(strettamente) crescente/decrescente è anch'essa (strettamente) crescente/decrescente.

ha $1-x \to 0^{\mp}$, da cui $\frac{1}{1-x} \to \mp\infty$, da cui (l'arco-tangente è continua!) $\operatorname{arctg}(\frac{1}{1-x}) \to$ "$\operatorname{arctg}(\mp\infty) =''$ $\mp\frac{\pi}{2}$). **(1)** Si voglia calcolare $\lim_{x\to+\infty}(\log_a(1+\sqrt{1+x}) - b^{-x^2})$, ove $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Quando $x \to +\infty$ si ha $1+x \to +\infty$, da cui (la radice è continua!) $\sqrt{1+x} \to +\infty$, da cui $1+\sqrt{1+x} \to +\infty$, da cui (il logaritmo è continuo!) $\log_a(1+\sqrt{1+x}) \to +\infty$ (se $a > 1$) o $\log_a(1+\sqrt{1+x}) \to -\infty$ (se $0 < a < 1$); poi si ha $-x^2 \to -\infty$ da cui (l'esponenziale è continuo!) $b^{-x^2} \to 0$ (se $b > 1$) oppure $b^{-x^2} \to +\infty$ (se $0 < b < 1$): pertanto il limite vale "$\pm\infty - 0$="$\pm\infty$ se $b > 1$, vale "$-\infty - \infty$="$-\infty$ se $0 < b < 1$ e $0 < a < 1$, mentre se $0 < b < 1$ e $a > 1$ si trova "$+\infty - \infty$"...? Questa è una "forma indeterminata", di cui ci occuperemo tra breve. **(2)** Si voglia calcolare $\lim_{x\to 2^-} \frac{\sin(x^2)}{(x-2)\operatorname{tg}(\sqrt{x})}$. Quando $x \to 2^+$ si ha $x^2 \to 4^+$, da cui (il seno è continuo) il numeratore tende a $\sin(4) < 0$ (infatti $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$); al denominatore si ha $x - 2 \to 0^+$, e (la tangente è continua) $\operatorname{tg}(\sqrt{x}) \to \operatorname{tg}(\sqrt{2}) > 0$ (perché $\sqrt{2} \sim 1,41$ e dunque $0 < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$), e dunque il denominatore tende a "$0^+ \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{2})$ ="0^+. Pertanto la funzione tende a "$\frac{\sin 4}{0^+}$ ="$-\infty$ (infatti, di certo diverge a ∞; il segno si ricava poi dall'osservazione dei segni del numeratore (< 0) e denominatore (> 0)).

Gli unici casi che non si possono risolvere con questo procedimento diretto sono le *forme indeterminate*, nelle quali è in atto un "braccio di ferro" tra tendenze contrastanti in cui non è chiaro chi alla fine prevarrà. Queste forme indeterminate, le più note delle quali si possono scrivere come $\pm\infty \mp \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0 e 1^∞, non sono in realtà indipendenti tra loro perché spesso si possono trasformare l'una nell'altra, come mostrano i seguenti esempi.

Esempi. **(1)** Il limite $\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{cotg} x$, che è della forma "$0 \cdot \infty$", può essere scritto anche come $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{tg} x}$ che è della forma "$\frac{0}{0}$", oppure come $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{cotg} x}{1/x}$, che è della forma "$\frac{\infty}{\infty}$". **(2)** Il limite $\ell = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{(x-1)^2}}$, che è della forma "$1^\infty$", può essere opportunamente riletto usando la continuità del logaritmo: se $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$ esiste, allora sarà "$\log_a(\ell)$"$= \lim_{x\to 1} \log_a(x^{\frac{1}{(x-1)^2}}) = \lim_{x\to 1} \frac{\log_a x}{(x-1)^2}$ (ove il primo membro va inteso nel senso di "$\lim_{t\to\ell} \log_a(t)$"), ed il limite da calcolare al secondo membro ora è della forma "$\frac{0}{0}$".

Gli strumenti più efficaci per affrontare le forme indeterminate sono il teorema del confronto (e i suoi corollari, come i due carabinieri), il confronto locale (che vedremo tra breve) e il teorema di de l'Hôpital (che vedremo invece più tardi nello studio della derivabilità). Per ora ci limitiamo a segnalare alcuni importanti casi particolari.

Proposizione 3.2.14. *Consideriamo i seguenti limiti in forma indeterminata.*

(a) (Funzioni razionali) *Siano* $f(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^i = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ *e* $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ *polinomi reali con* $a_m, b_n > 0$*: allora*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } m > n \\ a_m/b_m & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} (-1)^{m-n}\infty & \text{se } m > n \\ a_m/b_m & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}.$$

(b) (Esponenziali, logaritmi e potenze) *Per ogni* $a > 1$, $\alpha > 0$ *e* $\beta > 0$ *vale*

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\beta} = +\infty, \qquad (2)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a^\beta x}{x^\alpha} = 0, \qquad (3)\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha |\log_a x|^\beta = 0.$$

(c) (Limiti notevoli) *Per ogni* $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ *ed ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *vale*

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \qquad (3)\ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a,$$

$$(4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} = \log_a e, \qquad (5)\ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Dimostrazione. Useremo spesso il cambiamento di variabile (Proposizione 3.2.7). (a) Raccogliendo x^m al numeratore e x^n al denominatore si ha $\frac{f(x)}{g(x)} = x^{m-n} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}$, e le varie affermazioni seguono facilmente. (b) Per il limite (1) iniziamo dal caso $a = e$. Per $x > 1$ (non scordiamo che si sta calcolando un limite per $x \to +\infty$) la successione esponenziale $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ è strettamente crescente: pertanto, scelti due numeri naturali p, q tali che $0 < \beta \le p < q$ si ha $\frac{e^x}{x^\beta} > \frac{(1+\frac{x}{q})^q}{x^p}$, e il risultato segue il confronto (infatti il secondo membro tende a $+\infty$ per (a)). Per il caso generale $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\beta}$ basta operare il cambio di variabile $x = \frac{1}{\log a} t$ (si noti che $\log a > 0$, dunque si ha $c = p = +\infty$) per ottenere di nuovo $\lim_{t\to+\infty} (\log a)^\beta \frac{e^t}{x^\beta} = +\infty$. Il limite (2) segue da (1) col cambio di variabili $x = a^t$, e (3) segue da (2) col cambio $x = \frac{1}{t}$. (c) (1) Poiché la funzione è pari, possiamo limitarci a considerare il limite da destra. Quando $0 < x \ll 1$ si ha $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, da cui (dividendo per $\sin x$ e invertendo) $1 \le \frac{\sin x}{x} \le \cos x$: il risultato segue allora dal Teorema dei due carabinieri. (2) Vale $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$, da cui (sfruttando la continuità della potenza, effettuando il cambio di variabile $t = \frac{x}{2}$ e ricordando il limite notevole appena calcolato) si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2}$. (3) Iniziamo dal caso $a = e$. Dalla disuguaglianza fondamentale $1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$, sottraendo 1 ai tre membri si ottiene $x < e^x - 1 < \frac{x}{1-x}$; dividendo per x (a seconda che $x \gtrless 0$ gli estremi della disequazione resteranno fermi o andranno invertiti) e applicando i due carabinieri si ha che il limite vale $1 = \log e$, come voluto. Il caso generale si ottiene da questo col cambio di variabile $x = \frac{1}{\log a} t$. (4) Anche qui, nel caso $a = e$ si può usare la disuguaglianza fondamentale del logaritmo, e poi per il caso generale basta ricordare che $\log_a(1 + x) = \frac{1}{\log a} \log(1 + x)$; altrimenti si può operare in (3) il cambio di variabili $x = \log_a(1 + t)$. (5) La conclusione è banale se $\alpha = 0$; pensiamo dunque $\alpha \neq 0$. Intendendo $(1 + x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)}$ si ha $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{x} = \alpha \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\alpha \log(1+x)} \frac{\log(1+x)}{x}$; essendo poi $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \log(1+x)} - 1}{\alpha \log(1+x)} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (col cambio di variabile $u = \alpha \log(1+x)$ ovvero $x = e^{u/\alpha} - 1$) e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, si ottiene quanto voluto. □

3.2.4 Funzioni iperboliche

Funzioni iperboliche

Completiamo l'elenco delle funzioni elementari introducendo le "funzioni iperboliche"

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

dette rispettivamente *coseno iperbolico* e *seno iperbolico*. (Viene usata talvolta anche la *tangente iperbolica* $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.) Seno e coseno iperbolici sono funzioni con dominio $\mathbb{R}$, ed il loro nome è giustificato dal fatto che per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale l'identità

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

ovvero, il ruolo della circonferenza unitaria $x^2+y^2=1$ per le "funzioni circolari" cos e sin è svolto dall'iperbole equilatera $x^2-y^2=1$ per le "funzioni iperboliche" cosh e sinh. Le funzioni iperboliche hanno proprietà formali molto simili alle circolari, come ad esempio le seguenti formule di addizione-sottrazione e prostaferesi, di dimostrazione immediata:

$$\sinh(x_1\pm x_2)=\sinh x_1\cosh x_2\pm\cosh x_1\sinh x_2,\qquad \cosh(x_1\pm x_2)=\cosh x_1\cosh x_2\pm\sinh x_1\sinh x_2;$$

$$\sinh x_1+\sinh x_2=2\sinh\tfrac{x_1+x_2}{2}\cosh\tfrac{x_1-x_2}{2},\qquad \cosh x_1+\cosh x_2=2\cosh\tfrac{x_1+x_2}{2}\cosh\tfrac{x_1-x_2}{2}.$$

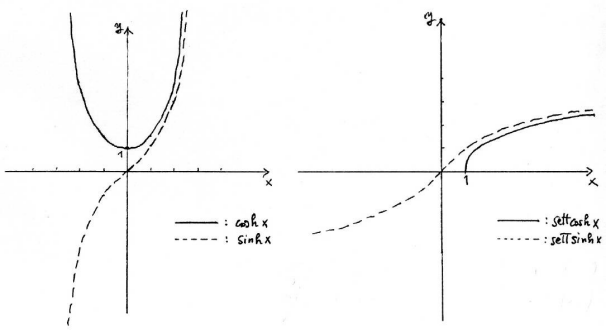

Figura 3.7: Grafici del seno iperbolico sinh, del coseno iperbolico cosh e delle loro inverse sett sinh e sett cosh.

La funzione $\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è ovviamente continua, dispari (cioè $\sinh(-x)=-\sinh x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, da cui $\sinh 0=0$) e strettamente crescente e suriettiva[(85)] e dunque è un omeomorfismo da $\mathbb{R}$ in sé; la sua inversa si chiama *settore seno iperbolico* e si denota con sett sinh: come abbiamo appena calcolato, sarà

$$\operatorname{sett}\sinh:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \operatorname{sett}\sinh(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Invece, la funzione $\cosh:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, oltre che continua, è pari (cioè $\cosh(-x)=\cosh x$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, con $\cosh 0=1$), strettamente crescente in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (basta usare l'identità $\cosh x_1-\cosh x_2=2\sinh\frac{x_1+x_2}{2}\sinh\frac{x_1-x_2}{2}$) e, se ristretta a $\mathbb{R}_{\geq 0}$, con immagine $\mathbb{R}_{\geq 1}$;[(86)] essa induce dunque un omeomorfismo da $\mathbb{R}_{\geq 0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 1}$ e la sua inversa, detta *settore coseno iperbolico* e denotata $\operatorname{sett}\cosh:\mathbb{R}_{\geq 1}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, sarà

$$\operatorname{sett}\cosh:\mathbb{R}_{\geq 1}\to\mathbb{R}_{\geq 0},\qquad \operatorname{sett}\cosh(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

[(85)] Per la stretta crescenza basta usare l'identità $\sinh x_1-\sinh x_2=2\cosh\frac{x_1+x_2}{2}\sinh\frac{x_1-x_2}{2}$; per la suriettività, calcolando la fibra di $y\in\mathbb{R}$, ovvero risolvendo $\sinh x=y$, si ha $e^x-e^{-x}=2y$ ovvero $e^{2x}-2ye^x-1=0$ ovvero $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$, da cui $x=\log(y+\sqrt{y^2+1})$.

[(86)] Infatti $y=\cosh x>0$, calcolando, diventa $e^x+e^{-x}=2y$ ovvero $e^{2x}-2ye^x+1=0$ ovvero $e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$, che ha soluzione reale se e solo se $y\geq 1$, data da $x=\log(y+\sqrt{y^2-1})$

3.2.5 Comportamento locale delle funzioni

Nel calcolo dei limiti, le forme indeterminate scaturiscono dal contrapporsi di tendenze opposte da parte delle varie componenti della funzione, che non rende chiaro quale sarà la tendenza di quest'ultima; l'esito finale di questa contrapposizione può essere assai diverso a seconda dei casi. Ad esempio le tre funzioni $f(x) = \sin\sqrt{x},\ e^x - 1,\ 1 - \cos x$ sono tutte infinitesime in 0, dunque i tre limiti $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ presentano una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$: tuttavia non è difficile vedere che per $f(x) = \sin\sqrt{x}$ (risp. $f(x) = e^x - 1$, $f(x) = 1 - \cos x$) tale limite vale ∞ (risp. 1, 0),[87] dunque $f(x) = \sin\sqrt{x}$ (risp. $f(x) = e^x - 1$, $f(x) = 1 - \cos x$) è un infinitesimo "più debole" (risp. "dello stesso tipo", "più forte") di x, nel senso che esso "va a zero più lentamente" (risp. "con uguale velocità", "più velocemente") di quanto faccia x. Analogamente, $\log x$, e^x e x^3 sono infinite in $+\infty$, ma si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^3} = 0$: perciò e^x (risp. $\log x$) è un infinito "più forte" (risp. "più debole") di x^3, ovvero esso "va all'infinito più velocemente" (risp. "più lentamente") di quanto faccia x^3". Vogliamo dunque stabilire con precisione cosa significa che due funzioni hanno comportamenti locali in c che sono "dello stesso tipo", oppure "l'uno prevalente sull'altro"; lo scopo finale di questa operazione sarà di sostituire, nei problemi locali in c (come ad esempio il calcolo di un limite quando x tende a c) un funzione "difficile" $f(x)$ con una più "facile" $g(x)$, quando si sappia che f e g hanno "comportamenti paragonabili" (anche questo un concetto da chiarire) all'intorno di c.

Trascurabilità ed asintoticità Siano $A \subset \mathbb{R}$, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A, e $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni. Si dirà che

(a) f è *trascurabile* rispetto a g (e si scriverà $f = o_c(g)$, da leggersi "f è *o piccolo di* g *per* x *che tende a* c") se esistono un intorno U di c in $\mathbb{R}$ ed una funzione $\sigma : U \to \mathbb{R}$ infinitesima in c tali che $f(x) = \sigma(x)g(x)$ per ogni $x \in (A \cap U) \setminus \{c\}$; **Trascurabilità**

(b) f è *asintotica* a g in c (e si scriverà $f \sim_c g$) se $f = g + o_c(g)$; più generalmente, f è *dello stesso ordine* di g in c (e si scriverà $f \sim_c^* g$) se esiste $\alpha \neq 0$ tale che $f = \alpha g + o_c(g)$. **Asintoticità** **Stesso ordine**

Nell'uso concreto, la scrittura "$f = g + o_c(h)$" significa "$f - g = o_c(h)$", ovvero "f è uguale a g più qualcosa di trascurabile rispetto a h in c"; e di questo "qualcosa" spesso non ci interessa dare la descrizione precisa, ma solo sapere che è trascurabile rispetto a h in c. (Talvolta con "$o_c(h)$" intenderemo l'insieme di tutte le funzioni trascurabili rispetto a h in c.) Così, ad esempio, nella definizione di "asintoticità" l'espressione "$f = g + o_c(g)$" significa "f e g differiscono per qualcosa di trascurabile rispetto a g in c". Tutto ciò non dovrebbe portare confusione.

[87] Infatti, ricordando la Proposizione 3.2.14 si ha $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} x = 0$.

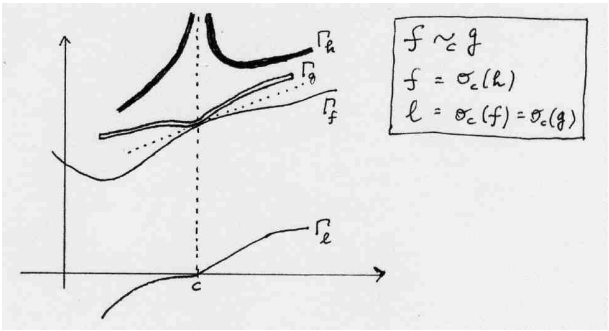

Figura 3.8: Comportamento locale delle funzioni f, g, h, ℓ in c.

La definizione (a) è la nozione che, nei nostri intenti, esprimerà l'idea di "andare a zero più velocemente" o "andare all'infinito più lentamente"; essa rappresenta una sorta di "ordine stretto" nella famiglia delle funzioni che hanno c come punto di chiusura del loro dominio. Nel caso in cui f e g siano entrambe infinitesimi (risp. infiniti) in c, si usa dire che "f è un infinitesimo di ordine superiore di g in c" (risp. che "f è un infinito di ordine inferiore di g in c"). Per quanto riguarda (b), "asintoticità" ed "essere dello stesso ordine sono invece le nozioni che esprimeranno, con maggiore o minor precisione, l'idea di "avere comportamenti paragonabili". Notiamo le seguenti proprietà:

- La relazione di trascurabilità soddisfa (Trns) ed una versione "forte" di (ASym)[(88)];
- Asintoticità ed "essere dello stesso ordine" sono entrambe relazioni d'equivalenza;[(89)]
- Se $\gamma \in o_c(g)$, allora $f\gamma \in o_c(fg)$ (si scrive anche "$f \cdot o_c(g) \subset o_c(fg)$");
- Se $\phi \in o_c(f)$ e $\gamma \in o_c(g)$, allora $\phi\gamma \in o_c(fg)$ (si scrive anche "$o_c(f)\, o_c(g) \subset o_c(fg)$");
- Sia $f = o_c(g)$. Se $\phi \in o_c(f)$ e $\gamma \in o_c(g)$ allora $\phi + \gamma \in o_c(g)$, ed in particolare se $\phi \in o_c(f)$ allora $\phi \in o_c(g)$ (si scrive anche "$o_c(f) + o_c(g) \subset o_c(g)$");
- Se $f \sim_c^* g$, allora $\phi \in o_c(f)$ se e solo se $\phi \in o_c(g)$ (si scrive anche "$o_c(f) = o_c(g)$").

Esempio. Si ha $(1 + 2x + o_0(x))(3x - x^2 + o_0(x^2)) = 3x - x^2 + o_0(x^2) + 6x^2 - 2x^3 + o_0(x^3) + o_0(x^2) + o_0(x^3) + o_0(x^3) = 3x + 5x^2 + o_0(x^2)$.

Nella pratica, per verificare trascurabilità e asintoticità si usano quasi sempre i seguenti

Proposizione 3.2.15. (Criteri di trascurabilità e asintoticità) *Se c è di accumulazione per A ed esiste un intorno U di c in cui g non si annulla mai eccetto eventualmente in c* (ovvero $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (A \cap U) \setminus \{c\}$)*, allora*

[(88)] Più precisamente, $f = o_c(g)$ e $g = o_c(f)$ se e solo se f e g sono entrambe nulle all'intorno di c, escluso al più c.

[(89)] Vediamo, ad esempio, essere dello stesso ordine. Si ha $f - 1 \cdot f = 0 = o_c(f)$, e dunque vale (Rifl). Se $f \sim_c^* g$ si ha $f - \alpha g = \sigma g$ con $\alpha \neq 0$ e σ infinitesima in c, da cui $f = (\alpha + \sigma)g$ e perciò $g - \frac{1}{\alpha} f = -\frac{1}{\alpha}\sigma g = \tau f$, con $\tau = -\frac{\sigma}{\alpha(\alpha+\sigma)}$ infinitesima in c, il che mostra che $g \sim_c^* f$, e dunque (Sym); infine, se $f \sim_c^* g$ e $g \sim_c^* h$ si ha $f - \alpha g = \sigma g$ e $g - \beta h = \tau h$ con $\alpha, \beta \neq 0$ e σ, τ infinitesime in c, da cui $f - \alpha\beta h = (f - \alpha g) + \alpha(g - \beta h) = \sigma g + \alpha\tau h = \eta h$, con $\eta = \sigma(\tau + \beta) + \alpha\tau$ infinitesima in c, ovvero $f \sim_c^* h$ da cui (Trns).

(i) $f = o_c(g)$ *se e solo se* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

(ii) $f \sim_c^* g$ *se e solo se* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \in \mathbb{R}^\times$ (dunque $f \sim_c g$ se e solo se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$).

Dimostrazione. Facile esercizio. □

Esempi. **(1)** Vale $\sin x = o_c(1)$ per $c = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); in generale, ovviamente, vale $\sigma(x) = o_c(1)$ se e solo se $\sigma(x)$ è infinitesima in c. **(2)** Bisogna fare attenzione a *dove* si sta facendo lo studio locale! Ad esempio, (i) vale $\sin x = o_{+\infty}(x)$ e $\sin x \sim_0 x$; (ii) vale $e^x = o_0(\frac{1}{x})$ e $\frac{1}{x} = o_{+\infty}(e^x)$ **(3)** La Proposizione 3.2.14 dice in sostanza che per ogni $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ si ha $x^\beta = o_{+\infty}(e^{\alpha x})$ (cioè, in parole povere, "nelle forme indeterminate, l'esponenziale prevale sulla potenza"), $\log^\beta x = o_{+\infty}(x^\alpha)$ e $|\log x|^\beta = o_0(\frac{1}{x^\alpha})$ ("nelle forme indeterminate, la potenza prevale sul logaritmo"). **(4)** Sempre la Proposizione 3.2.14 afferma che $f(x) \sim_0 x$ per $f(x) = \sin x$, $e^x - 1$, $\log(1+x)$, mentre $1 - \cos x \sim_0^* x^2$ e $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0^* x$ per ogni $\alpha \neq 0$. **(5)** Essendo $\sin 2x \sim_0^* x$ (infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t/2} = 2 \in \mathbb{R}^\times$) si ha $o_0(\sin 2x) = o_0(x)$; per lo stesso motivo si ha $o_0(1 - \cos x) = o_0(x^2)$. **(6)** Essendo $\log x = o_{+\infty}(\sqrt{x})$, si avrà $o_{+\infty}(\log x) \subset o_{+\infty}(\sqrt{x})$.

Trascurabilità ed asintoticità non vanno sempre d'accordo con la composizione di funzioni:

Proposizione 3.2.16. *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A, e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$.*

(i) (Rapporti buoni con la composizione a destra) *Sia $B \subset \mathbb{R}$, $p \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per B, $\phi : B \to A$ una funzione tale che $\lim_{t\to p} \phi(t) = c$ e tale che p non sia un punto di accumulazione di $\phi^{-1}(c)$.*[(90)]

(a) *Se $f = o_c(g)$, allora $f \circ \phi = o_p(g \circ \phi)$;*
(b) *Se $f \sim_c g$, allora $f \circ \phi \sim_p g \circ \phi$.*

(ii) (Rapporti "circospetti" con la composizione a sinistra) *Data una funzione continua φ tale che $\varphi \circ f$ e $\varphi \circ g$ siano definite all'intorno di c, anche se $f = o_c(g)$ non è detto che sia $\varphi \circ f = o_c(\varphi \circ g)$; similmente, anche se $f \sim_c g$, non è detto che sia $\varphi \circ f \sim_c \varphi \circ g$. Tuttavia, se $f \sim_c g$, si hanno ad esempio i seguenti fatti.*

(a) *Se f e g sono positive e non nulle in un intorno di c* (tranne al più in c) *allora, dato $\alpha \in \mathbb{R}^\times$, sarà $f^\alpha \sim_c g^\alpha$.*
(b) *Se $f - g$ è infinitesima in c allora $e^f \sim_c e^g$.*
(c) *Se f e g sono positive e non nulle in un intorno di c* (tranne al più in c) *e $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$ esistono $\neq 1$, allora $\log f \sim_c \log g$.*

Dimostrazione. (i) Proviamo (a). Sia $f(x) = \sigma(x)g(x)$ con σ infinitesima in c: allora $(f \circ \phi)(t) = (\sigma \circ \phi)(t)(g \circ \phi)(t)$, e basta mostrare che $\sigma \circ \phi$ è infinitesima in p. Preso $\varepsilon > 0$, esiste un intorno U di c in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale $\sigma(U \setminus \{c\}) \subset B_0(\varepsilon)$; per le ipotesi su ϕ, esiste un intorno W di p tale che $\phi(W \setminus \{p\}) \subset U \setminus \{c\}$, e dunque $(\sigma \circ \phi)(W \setminus \{p\}) \subset \sigma(U \setminus \{c\}) \subset B_0(\varepsilon)$. Ciò prova (a).[(91)] Passando a (b), si ha $f - g = \sigma g$ con

[(90)] ovvero, esiste un intorno W di p in $\widetilde{\mathbb{R}}$ tale che, in $W \cap B$, l'uguaglianza $\phi(t) = c$ è soddisfatta eventualmente al più da $t = p$.

[(91)] In alternativa si poteva osservare che, operando il cambio di variabile $x = \phi(t)$, le ipotesi introdotte su ϕ sono sufficienti a mostrare la prima parte della Proposizione 3.2.7, cioè che se esiste $\lim_{x\to c} f(x)$ allora esiste anche $\lim_{t\to p} f(\phi(t))$ ed è ad esso uguale (vedi la dimostrazione a pag. 97).

σ infinitesima in c; dunque $(f\circ\phi)-(g\circ\phi)=(\sigma\circ\phi)(g\circ\phi)$, e come visto $\sigma\circ\phi$ è infinitesima in p. (ii) Ad esempio, se $c=+\infty$, $f(x)=x$, $g(x)=-x^2$ e $\varphi(x)=e^x$, si ha $x=o_{+\infty}(-x^2)$ ma e^x non è $o_{+\infty}(e^{-x^2})$ (anzi vale addirittura il contrario!). Similmente, se $h(x)=x-x^2$, si ha $x-x^2\sim_{+\infty}-x^2$ ma e^{x-x^2} non è asintotico a e^{-x^2} in $+\infty$ (infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-x^2}}{e^{-x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$). Altro esempio: se $c=0$, $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{x^2}$ e $\varphi(x)=\log x$ si ha $f\sim_0 g$ ma $\log f(x)=x$ non è asintotico a $\log g(x)=x^2$ in 0. Le affermazioni che seguono si verificano direttamente dalle definizioni: vale $\lim_{x\to c}\frac{f^\alpha}{g^\alpha}=(\lim_{x\to c}\frac{f}{g})^\alpha$, da cui (a); $\lim_{x\to c}\frac{e^f}{e^g}=\lim_{x\to c}e^{f-g}$, da cui (b); infine, se $f=(1+\sigma)g$ con σ infinitesima in c si ha $\log f-\log g=\log\frac{f}{g}=\log(1+\sigma)$, che, essendo infinitesima, è di certo $o_c(\log_c g)$ nelle ipotesi date. □

Esempi. **(1)** Sappiamo che $\sin x\sim_0 x$ e $x^2=o_0(\sin x)$; grazie alla Proposizione 3.2.16(i), possiamo affermare che se $\phi(x)$ è una *qualsiasi* funzione infinitesima in 0 si ha $\sin\phi(x)\sim_0\phi(x)$ e $\phi^2(x)=o_0(\sin\phi(x))=o_0(\phi(x))$: per non sbagliarsi, basterà ragionare ponendo $t=\phi(x)$. Ad esempio, posto $t=x^2-x$ si ha $\sin(x^2-x)=\sin t\sim_0 t=x^2-x\sim_0-x$. **(2)** Se f,g,h sono funzioni ≥ 0 all'intorno di c con $f\sim_c g$ e $h=o_c(f)$, si ha anche $\sqrt{f}\sim_c\sqrt{c}$ e $\sqrt{h}=o_c(\sqrt{f})$ (basta notare che $\sqrt{f}=f^{\frac{1}{2}}$, ed applicare la Proposizione 3.2.16(ii)).

L'uso di trascurabilità ed asintoticità semplifica considerevolmente il calcolo dei limiti.

Proposizione 3.2.17. *Siano $A\subset\mathbb{R}$, $c\in\widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A, e siano $f,g:A\to\mathbb{R}$.*

(i) (Sostituzione di un fattore con una funzione asintotica) *Esista un intorno U di c in cui g non si annulla mai eccetto eventualmente in c, e sia $g\sim_c\tilde{g}$. Allora, se esistono,*

$$\lim_{x\to c}f(x)g(x)=\lim_{x\to c}f(x)\tilde{g}(x),\qquad\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\tilde{g}(x)}.$$

(ii) (Eliminazione degli addendi trascurabili) *Esista un intorno U di c in cui f e g non si annullano mai eccetto eventualmente in c. Allora, se esistono,*

$$\lim_{x\to c}(f(x)+o_c(f))(g(x)+o_c(g))=\lim_{x\to c}f(x)g(x),\qquad\lim_{x\to c}\frac{f(x)+o_c(f)}{g(x)+o_c(g)}=\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dimostrazione. (i) Facile (raccogliere $g(x)$, e usare la Proposizione 3.2.15(ii)). (ii) Segue applicando (i) prima al fattore $f(x)+o_c(f)$ (asintotico a $f(x)$) e poi al fattore $g(x)+o_c(g)$ (asintotico a $g(x)$). □

Esempi. **(1)** Poiché x^3, $\sin x$, $\log x$ e 5 sono tutti $o_{+\infty}(e^x)$, si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x^3+\sin x}{5+\log x-2e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{-2e^x}=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$. **(2)** Analogamente, poiché $x^2=o_0(x)$ e $1-\cos x\sim_0^* x^2=o_0(x)=o_0(\sin x)$, si ha $\lim_{x\to0}\frac{x-x^2}{1-\cos x-3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{-3\sin x}=-\frac{1}{3}$.

Approssimazioni polinomiali. Scale di confronto e sviluppi asintotici Si è visto che è importante saper ragionare, nel calcolo di un limite, "a meno di trascurabilità ed asintoticità" per sostituire, quando possibile, una funzione complicata con una più semplice che non alteri il risultato. Poiché le funzioni più semplici sono i polinomi (eventualmente anche con monomi di grado negativo), sarebbe allora interessante trovare un modo per approssimare una data funzione, all'intorno del punto in cui si sta calcolando il limite, con

un polinomio che sarà tanto più lungo quanto più si richiede essere piccolo l'errore tra la funzione stessa ed il polinomio approssimante. Cerchiamo di spiegare questo procedimento di "approssimazione progressiva".

- Consideriamo una funzione $f(x)$ ed un punto di accumulazione $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ per il dominio di f (notiamo che tale c potrebbe non appartenere al dominio, e potrebbe essere anche $\pm\infty$). In realtà, se $c \in \mathbb{R}$ ci possiamo limitare al caso $c = 0$: infatti basta studiare $\varphi(t) := f(t + c)$ per $t \sim 0$ e poi risostituire $t = x - c$.

- Supponiamo dunque di studiare $f(x)$ quando x si trova all'intorno di $c = 0$ oppure di $c = +\infty$. Siano $\alpha_0 \neq 0$ e $n_0 \in \mathbb{Z}$ tali che $f(x) \sim_c \alpha_0 x^{n_0}$: tali numeri potrebbero anche non esistere, ma se esistono sono unici.[(92)] Il monomio $\alpha_0 x^{n_0}$, che costituisce la "parte più significativa" della funzione $f(x)$ all'intorno di c, descrivendone le caratteristiche più importanti del comportamento, è detto *parte principale* di $f(x)$ in c. Se $n_0 > 0$, la funzione f si dice essere un *infinitesimo* (se $c = 0$) o un *infinito* (se $c = +\infty$) *di ordine* n_0; se invece $n_0 < 0$, f si dice essere un *infinito* (se $c = 0$) o un *infinitesimo* (se $c = +\infty$) *di ordine* $-n_0$. Se invece $n_0 = 0$, allora si dice che f è *finita in c*: ciò significa semplicemente che $\lim_{x \to c} f(x) = \alpha_0 \neq 0$.

Parte principale

Ordine di infinitesimo e di infinito in un punto

Esempi. **(1)** Se $f(x) = \sin 2x$ e $c = 0$, come sappiamo la parte principale di $f(x)$ in $c = 0$ è $2x$, ovvero si ha $\alpha_0 = 2$ e $n_0 = 1$ (dunque f è un infinitesimo di ordine 1 in $c = 0$). **(2)** Se $f(x) = e^x$ e $c = 1$, poniamo $x = t + 1$, ottenendo dunque $\varphi(t) = f(t + 1) = e^{t+1}$; essendo $\varphi(0) = e \neq 0$, la parte principale di $\varphi(t)$ in 0 (e dunque di $f(x)$ in 1) è e, ovvero $\alpha_0 = e$ e $n_0 = 0$. **(3)** Se $f(x) = \sqrt{\frac{9}{x^4} - x}$, è chiaro che f sarà un infinito in 0 (infatti $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$): come capirne l'ordine? Raccogliendo $\frac{9}{x^4}$ dentro la radice e portandolo fuori, si ha $f(x) = \frac{3}{x^2}\sqrt{1 - \frac{1}{9}x^5}$: essendo ovviamente $\sqrt{1 - \frac{1}{9}x^5} \sim_0 1$, appare chiaro che la parte principale di $f(x)$ in $c = 0$ è $\frac{3}{x^2}$, ovvero $\alpha_0 = 3$ e $n_0 = -2$ (dunque f è un infinito di ordine $|-2| = 2$ in $c = 0$). **(4)** Se $f(x) = \log(e^{x^2} - 1) - 3x$ e $c = +\infty$, la funzione $f(x)$ è un infinito: infatti, raccogliendo e facendo uscire e^{x^2} nel logaritmo, si ha $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}(\log(1 - e^{-x^2}) + x^2 - 3x) = \lim_{x \to +\infty} x^2(\frac{\log(1-e^{-x^2})}{x^2} + 1 - \frac{3}{x}) = +\infty$. Da questo conto appare pure evidente che la parte principale di $f(x)$ in $+\infty$ è x^2. **(5)** Se $f(x) = \log|x|$ e $c = 0$ oppure $c = +\infty$, la funzione f è un infinito, ma come noto non esiste nessuna potenza intera di x che sia asintotica ad f in $c = 0$. Lo stesso vale ad esempio per $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Altrimenti detto, questi sono casi in cui la parte principale (intera!) non esiste.

- Trovata la parte principale, si può cercare di migliorare l'approssimazione di f vicino a c rispetto a quella, in molti casi già soddisfacente, data dalla parte principale stessa: si tratta di ripetere il procedimento per la funzione "errore" $f(x) - \lambda_0 x^{n_0}$, trovando la sua parte principale $\alpha_1 x^{n_1}$ (con $\alpha_1 \neq 0$ e $n_1 \in \mathbb{Z}$: se $c = 0$ sarà $n_1 > n_0$, se $c = +\infty$ sarà $n_1 < n_0$). Il polinomio $\alpha_0 x^{n_0} + \alpha_1 x^{n_1}$ è più complicato del precedente $\alpha_0 x^{n_0}$, ma approssima meglio $f(x)$. Se anche questa approssimazione non basta, si può cercare di iterare il procedimento fino ad un certo ordine k, ottenendo un'unica espressione

[(92)] In effetti, se $f(x) \sim_c \alpha_0 x^{n_0}$ e $f(x) \sim_c \beta_0 x^{m_0}$, per transitività si ha $\alpha_0 x^{n_0} \sim_c \beta_0 x^{m_0}$, ovvero $\lim_{x \to c} \frac{\alpha_0 x^{n_0}}{\beta_0 x^{m_0}} = \lim_{x \to c} \frac{\alpha_0}{\beta_0} x^{n_0 - m_0} = 1$: ciò implica che $\frac{\alpha_0}{\beta_0} = 1$ e $n_0 - m_0 = 0$, ovvero $\alpha_0 = \beta_0$ e $n_0 = m_0$.

del tipo (detta *approssimazione* –o *sviluppo*– *asintotico (rispetto alla scala di potenze intere) di $f(x)$ in c fino all'ordine k*)

Sviluppo asintotico

$$f(x) = \alpha_0 x^{n_0} + \alpha_1 x^{n_1} + \cdots + \alpha_k x^{n_k} + o_0(x^{n_k}).$$

Esempi. Riprendiamo gli esempi precedenti. **(1)** Per l'approssimazione polinomiale di $\sin 2x$ in $c = 0$ di ordine $k > 1$, vedremo tra breve. **(2)** Se $f(x) = e^x$ e $c = 1$, ovvero per $\varphi(t) = e^{t+1}$ in 0, si ha (ricordando il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$) che $\varphi(t) - e = e^{t+1} - e = e(e^t - 1) \sim_0 et$: dunque $\varphi(t) = e + et + o_0(t)$, ovvero $f(x) = e + e(x-1) + o_1(x-1)$. Per l'approssimazione ulteriore, vedremo tra breve. **(3)** Se $f(x) = \sqrt{\frac{9}{x^4} - x}$ e $c = 0$, si ha $f(x) - \frac{3}{x^2} = \frac{3}{x^2}(\sqrt{1 - \frac{1}{9}x^5} - 1) = \frac{3}{x^2} \frac{-\frac{1}{9}x^5}{\sqrt{1-\frac{1}{9}x^5}+1} \sim_0 \frac{3}{x^2} \frac{-\frac{1}{9}x^5}{2} = -\frac{1}{6}x^3$, pertanto $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$ (anche qui, per l'approssimazione ulteriore, vedremo tra breve). **(4)** Se $f(x) = \log(e^{x^2} - 1) - 3x$ e $c = +\infty$, dal conto precedente è chiaro che $f(x) = x^2 - 3x + o_{+\infty}(1)$ (infatti $\lim_{x\to+\infty} \log(1 - e^{-x^2}) = 0$).

Sono da tenere presente le seguenti approssimazioni polinomiali in $c = 0$, che permettono di trattare facilmente parecchi casi particolari come quelli lasciati in sospeso in precedenza e che saranno giustificate più tardi, quando parleremo della *formula di Taylor* per funzioni derivabili:[(93)]

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} + o_0(x^k) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + o_0(x^k) \\
\log(1+x) &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j} + o_0(x^k) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o_0(x^k) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{j=0}^{k} \binom{\alpha}{j} x^j + o_0(x^k) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} x^k + o_0(x^k) \\
\cos x &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o_0(x^{2k+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2k+1}) \\
\sin x &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o_0(x^{2(k+1)}) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2(k+1)}) \\
\operatorname{tg} x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_0(x^8) \\
\operatorname{arctg} x &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)} + o_0(x^{2(k+1)}) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o_0(x^{2(k+1)}) \\
\cosh x &= \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o_0(x^{2k+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_0(x^{2k+1}) \\
\sinh x &= \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o_0(x^{2(k+1)}) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(x^{2(k+1)}).
\end{aligned}$$

[(93)] Se $\alpha > 0$ e $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ si definisce $\binom{\alpha}{m} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(m-1))}{m!}$.

Esempi. Trattiamo dunque gli sviluppi degli esempi lasciati in sospeso. **(1)** Da $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_0(t^{2(k+1)})$, ponendo $t = 2x$ si ha $\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o_0(x^{2(k+1)})$. **(2)** Vale $\varphi(t) = e^{t+1} = e\,e^t = e(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{k!} + o_0(t^k)) = e + et + e\frac{t^2}{2!} + \cdots + e\frac{t^k}{k!} + o_0(t^k)$, ovvero $f(x) = e^x = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + e\frac{(x-1)^k}{k!} + o_1((x-1)^k)$. **(3)** Si ha $\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}t^2 + o_0(t^2) = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{16}t^3 + o_0(t^3)$: pertanto se $f(x) = \sqrt{\frac{9}{x^4} - x}$ e $c = 0$, ponendo $t = -\frac{1}{9}x^5$ si ha $f(x) = \frac{3}{x^2}(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{9}x^5}) = \frac{3}{x^2}(1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{9}x^5) - \frac{1}{8}(-\frac{1}{9}x^5)^2 - \frac{1}{16}(-\frac{1}{9}x^5)^3 + o_0(x^{19})) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{216}x^8 + \frac{1}{3888}x^{13} + o_0(x^{17})$. **(4)** Gli sviluppi forniti per $c = 0$ possono servire anche per gli sviluppi asintotici in $c = +\infty$. Ad esempio sia $f(x) = \sqrt[3]{4x^6 - 3x^2 + 1}$: scrivendo $f(x) = \sqrt[3]{4}\,x^2 \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4}\frac{1}{x^4} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^6}} = \sqrt[3]{4}\,x^2 \sqrt[3]{1+t}$ con $t = -\frac{3}{4}x^{-4} + \frac{1}{4}x^{-6}$, poiché t è infinitesimo si ha $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{1}{3}t + o_0(t^2)$, e poiché $o_0(t^2) = o_{+\infty}((x^{-4})^2) = o_{+\infty}(x^{-8})$ si ha $f(x) = \sqrt[3]{4}\,x^2(1 + \frac{1}{3}(-\frac{3}{4}x^{-4} + \frac{1}{4}x^{-6}) + o_{+\infty}(x^{-8})) = \sqrt[3]{4}\,x^2 - \frac{\sqrt[3]{4}}{4}x^{-2} + \frac{\sqrt[3]{4}}{12}x^{-4} + o_{+\infty}(x^{-6})$. **(5)** Cerchiamo lo sviluppo di $f(x) = \cos x$ attorno $c = \frac{\pi}{2}$. Si tratta dunque di studiare $f(t + \frac{\pi}{2}) = \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$ attorno $t = 0$: si ottiene allora $-\sin t = -(t - \frac{t^3}{6} + o_0(t^4))$. A questo punto, basta risostituire $t = x - \frac{\pi}{2}$ per ottenere ciò che si cercava: $\cos x = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2})^3 + o_{\frac{\pi}{2}}((x - \frac{\pi}{2})^4)$. **(6)** Cerchiamo lo sviluppo di $f(x) = e^x$ attorno $c = 1$, ovvero $f(t+1) = e^{t+1} = e\,e^t = e(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)) = e + et + \frac{e}{2}t^2 + o_0(t^2)$, dunque $e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + o_0((x-1)^2)$. **(7)** Cerchiamo lo sviluppo di $f(x) = \log(3x - 1)$ attorno $c = 2$, ovvero lo sviluppo di $f(t + 2) = \log(3t + 5)$ attorno $t = 0$. Per usare lo sviluppo asintotico del logaritmo che conosciamo bisogna ricondurci al caso in cui l'argomento del logaritmo tende a 1, dunque facciamo così: $\log(3t + 5) = \log(5(1 + \frac{3}{5}t)) = \log 5 + \log(1 + \frac{3}{5}t) = \log 5 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{2}(\frac{3}{5}t)^2 + o_0(t^2) = \log 5 + \frac{3}{5}t - \frac{9}{50}t^2 + o_0(t^2)$, da cui, risostituendo $t = x - 2$, si ottiene $\log(3x - 1) = \log 5 + \frac{3}{5}(x-2) - \frac{9}{50}(x-2)^2 + o_0((x-2)^2)$ (la parte principale è $\log 5 = (\log 5)(x-2)^0$).

Come visto in alcuni esempi precedenti (come per $\log x$ e $\sqrt[3]{x}$ in $c = 0$ e in $c = +\infty$), non per tutte le funzioni è possibile effettuare lo sviluppo asintotico (polinomiale) desiderato; e talvolta è addirittura impossibile trovare una parte principale polinomiale. In effetti, la famiglia delle potenze intere costituisce un insieme piuttosto "rado", che non sempre permette di misurare accuratamente, e dunque di classificare, l'ordine di infinitesimo o infinito delle varie funzioni.[94] A tal proposito, è utile generalizzare quanto detto finora, introducendo il concetto di "scala di confronto" in un punto c.

Scala di confronto

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A. Una *scala di confronto* Φ_c su A in c è una famiglia di funzioni definite e mai nulle in un intorno di c (tranne al più in c) e sulla quale la relazione di trascurabilità soddisfa (Tot): ovvero, date due qualsiasi funzioni $\phi, \psi \in \Phi_c$ della famiglia, una (e solo una) tra le due relazioni $\phi = o_c(\psi)$ oppure $\psi = o_c(\phi)$ deve essere vera. Ora, data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, se esiste (necessariamente unica) una $\phi_0 \in \Phi_c$ tale che $f \sim_c^* \phi_0$, tale ϕ_0 si dirà l'*ordine di f rispetto a Φ_c*. Si avrà dunque $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{\phi_0(x)} = \alpha_0 \in \mathbb{R}^\times$, e la funzione $\lambda_0\phi_0$ (che sarà dunque asintotica a f in c) si dirà *parte principale di f rispetto a Φ_c*. Trovata la parte principale, si può ripetere il procedimento per la funzione $f - \lambda_0\phi_0$, trovando la sua parte principale $\alpha_1\phi_1$ rispetto a Φ_c (sarà dunque $\phi_1 = o_c(\phi_0)$); continuando finché possibile o finché ci si accontenta o si ritiene opportuno (diciamo fino ad un certo ordine ϕ_k), si ottiene un'unica espressione del tipo

$$f(x) = \alpha_0\phi_0(x) + \alpha_1\phi_1(x) + \cdots + \alpha_k\phi_k(x) + o_c(\phi_k)$$

[94] È come avere a disposizione un righello piuttosto grossolano con le sole tacche dei decimetri, che non permette di misurare i centimetri, e tantomeno i millimetri.

che si dice *sviluppo asintotico di f rispetto a Φ_c* (fino all'ordine ϕ_k).

La più naturale scala di confronto, che abbiamo usato fino ad ora, è quella delle *potenze intere* $\Phi_c = \{(x-c)^n : n \in \mathbb{Z}\}$ (per $c \in \mathbb{R}$) e $\Phi_{\pm\infty} = \{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$ (che coincide con Φ_0): essa si pensa come tacitamente scelta quando si parla di "ordine di f in c" oppure di "sviluppo asintotico di f in c" senza specificare la scala. (In tal caso, come detto, si parla anche di "approssimazione polinomiale" di f in c.) Quando essa non fosse sufficientemente raffinata per dare un ordine (o tutto uno sviluppo asintotico) a f, bisognerà considerare alcuni suoi miglioramenti: il più ovvio è la scala delle *potenze reali* $\Phi'_c = \{|x-c|^\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $\Phi'_{\pm\infty} = \{|x|^\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$, e poi ad esempio $\Phi''_c = \{|x-c|^\alpha |\log|x-c||^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $\Phi''_{\pm\infty} = \{|x|^\alpha |\log|x||^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, oppure $\Phi'''_{\pm\infty} = \{|x|^\alpha e^{\beta|x|} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Esempi. **(1)** Sia $f(x) = \sqrt{x^2+2x}$. Se $c = 0$, f è infinitesima in c: raccogliendo $2x$ nella radice e notando che $\frac{x}{2} \to 0$, si ottiene $f(x) = \sqrt{2x}\sqrt{1+\frac{x}{2}} = \sqrt{2x}(1 + \frac{1}{2}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{8}(\frac{x}{2})^2 - \frac{1}{16}(\frac{x}{2})^3 + o_0(x^3)) = \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}x^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{32}x^{\frac{5}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{128}x^{\frac{7}{2}} + o_0(x^{\frac{7}{2}}))$ (nella scala di confronto delle potenze reali). Se $c = -3$ poniamo $x = t+3$ ottenendo $f(t) = \sqrt{t^2-4t+3}$: questa funzione è finita in $t = 0$, con $f(0) = \sqrt{3}$ parte principale; si ha poi $f(t) - \sqrt{3} = \frac{4t-t^2}{\sqrt{3}+\sqrt{t^2-4t+3}} \sim_0 \frac{4t-t^2}{2\sqrt{3}} \sim_0 \frac{2}{3}\sqrt{3}t$. Dunque $f(x) = \sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}(x+3) + o_{-3}(x+3)$. Infine, se $c = +\infty$, raccogliendo x^2 nella radice e notando che $\frac{2}{x} \to 0$ si ha $f(x) = \sqrt{x^2+2x} = x\sqrt{1+\frac{2}{x}} = x(1 + \frac{1}{2}(\frac{2}{x}) - \frac{1}{8}(\frac{2}{x})^2 + o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})) = x + 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$. **(2)** Negli esempi precedenti di $f(x) = \log|x|$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ con $c = 0$ oppure $c = +\infty$, tali funzioni non avevano parte principale nella scala delle potenze intere ma ce l'hanno (e coincidente con loro stesse) nella scala più raffinata $\{|x|^\alpha |\log|x||^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Torniamo ora alla Proposizione 3.2.14. Lo sviluppo asintotico di e^x in 0 mostra che $e^x - 1 \sim_0 x$ e dunque si riottiene subito $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Invece il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ (ove $\alpha, \beta > 0$), presenta una forma indeterminata "$\frac{\infty}{\infty}$" di fronte alla quale, muniti del solo sviluppo asintotico in 0, siamo in difficoltà, e la ragione è chiara. Infatti noi stiamo studiando un limite per $x \to +\infty$ mentre tutti questi sviluppi asintotici, così come li abbiamo introdotti, hanno significato *solo all'intorno di 0, ovvero per* $0 < |x| \ll 1$, ed in particolare i resti, indicati nella forma $o_0(x^k)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, sono infinitesimi di ordine k in 0 ma in principio il loro comportamento è ignoto quando x si allontana da 0. Il problema, dunque, è sostanzialmente il seguente: data una funzione f, *sapere per quali punti x del suo dominio lo sviluppo asintotico di $f(x)$ in 0 fino all'ordine n tende effettivamente a $f(x)$ quando $n \in \mathbb{N}$ tende verso $+\infty$*. Ci occuperemo brevemente di tale problema parlando della già citata formula di Taylor.

Esempi. **(1)** Poiché $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, il suo sviluppo asintotico in 0 sarà $\frac{1}{2}(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n) - (1 + (-x) + \cdots + \frac{(-x)^n}{n!} + o_0(x^n))) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_0(x^{2(n+1)})$: si noti che coincide con quello scritto in precedenza. **(2)** Un metodo molto usato per calcolare gli sviluppi asintotici è quello *a cascata*, in cui si trovano i coefficienti a partire da quello della parte principale per poi andare via via a quelli dei termini ulteriori. Ad esempio, ritroviamo lo sviluppo di $\operatorname{tg} x$ in 0 fino all'ordine 5, ovvero i coefficienti di $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \varphi x^5 + o_0(x^5)$. Intanto, poiché $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (ovvero $\operatorname{tg} x$ è dispari), si ottiene $\alpha + \beta(-x) + \gamma(-x)^2 + \delta(-x)^3 + \epsilon(-x)^4 + \varphi(-x)^5 + o_0(x^5) = -(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \varphi x^5) + o_0(x^5)$, ovvero $2(\alpha + \gamma x^2 + \epsilon x^4 + o_0(x^5) = o_0(x^5)$, il che implica ovviamente $\alpha = \gamma = \epsilon = 0$: resta dunque $\operatorname{tg} x = \beta x + \delta x^3 + \varphi x^5 + o_0(x^5)$, con β, δ, φ da determinare. Ora, da $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ si ricava $\operatorname{tg} x \cos x = \sin x$, ovvero $\left(\beta x + \delta x^3 + \varphi x^5 + o_0(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + -\frac{x^4}{24} + o_o(x^5)\right) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)$ da cui, moltiplicando i vari

termini ed inglobando tutti gli $o_0(x^5)$ in un unico addendo (ad esempio, tra essi, vengono inglobati termini come $\frac{x^4}{24}\frac{x^3}{6}$, oppure $\frac{x^2}{2}o_0(x^5)$), si ottiene $\beta x+(-\frac{\beta}{2}+\delta)x^3+(\frac{\beta}{24}-\frac{\delta}{2}+\varphi)x^5+o_0(x^5)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o_0(x^5)$, e ciò impone $\beta=1$, $-\frac{\beta}{2}+\delta=-\frac{1}{6}$ e $\frac{\beta}{24}-\frac{\delta}{2}+\varphi=\frac{1}{120}$, da cui $\beta=1$, $\delta=\frac{1}{3}$ e $\varphi=\frac{2}{15}$ (come già detto in precedenza). **(3)** Cerchiamo l'ordine di $f(x)=1-\cos(e^{2x}-1)$ in 0. L'argomento $t=e^{2x}-1$ del coseno è infinitesimo in 0, e dunque, usando lo sviluppo del coseno e la Proposizione 3.2.17(ii) si ha $f(x)\sim_0\frac{(e^{2x}-1)^2}{2}\sim_0^*(e^{2x}-1)^2$; essendo $2x$ infinitesimo (ed usando sempre la Proposizione 3.2.17(ii)) si ha $e^{2x}-1\sim_0 2x\sim_0^* x$, e pertanto $f(x)\sim_0^* x^2$: pertanto l'ordine di f in 0 è 2. Se si vuole lo sviluppo asintotico di $f(x)$ in 0 fino all'ordine 4, si ha $f(x)=\frac{(e^{2x}-1)^2}{2}+\frac{(e^{2x}-1)^4}{24}+o(x^4)$ (essendo $e^{2x}-1\sim_0^* x$ si ha $o((e^{2x}-1)^4)=o(x^4)$); ora, vale $e^{2x}-1=(2x)+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+\frac{(2x)^4}{24}+o_0(x^4)=2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+o_0(x^4)$ da cui $(e^{2x}-1)^2=4x^2+4x^4+8x^3+\frac{16}{3}x^4+o_0(x^4)=4x^2+8x^3+\frac{28}{3}x^4+o_0(x^4)$ e $(e^{2x}-1)^4=16x^4+o_0(x^4)$; se ne ricava che $f(x)=\frac{4x^2+8x^3+\frac{28}{3}x^4+o_0(x^4)}{2}+\frac{16x^4+o_0(x^4)}{24}+o(x^4)=2x^2+4x^3+\frac{16}{3}x^4+o_0(x^4)$, e la parte principale di $f(x)$ in 0 è dunque $2x^2$. **(4)** Si consideri $\log x$ per $x\to 1$. Poiché $\log(1+t)\sim_0 t$, considerando $x=1+t$ con $t=x-1$ si ha $t\to 0$, e dunque $\log x\sim_1(x-1)$ (si sta usando sempre la Proposizione 3.2.17(ii)), e analogamente lo sviluppo asintotico si ottiene da quello di $\log(1+t)$. **(5)** Nella funzione $f(x)=\operatorname{arctg}(\sin\frac{1}{x})$, l'argomento dell'arco-tangente è infinitesimo in $+\infty$. Pertanto, se si chiede lo sviluppo asintotico di $f(x)$ in $+\infty$ fino (diciamo) all'ordine 3, usando lo sviluppo asintotico dell'arco-tangente in 0 (per $t=\sin\frac{1}{x}$) e la solita Proposizione 3.2.17(ii), si ha $f(x)=(\sin\frac{1}{x})-\frac{(\sin\frac{1}{x})^3}{3}+o_{+\infty}((\sin\frac{1}{x})^3)$. Esaminiamo ora $\sin\frac{1}{x}$: anche l'argomento del seno $\frac{1}{x}$ è infinitesimo in $+\infty$, e dunque per gli stessi motivi si ha $\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{(\frac{1}{x})^3}{6}+o_{+\infty}((\frac{1}{x})^3)=\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o_{+\infty}(\frac{1}{x^3})$; in particolare si ha $\sin\frac{1}{x}\sim_{+\infty}\frac{1}{x}$ e dunque $o_{+\infty}((\sin\frac{1}{x})^3)=o_{+\infty}(\frac{1}{x^3})$. Ne ricaviamo $f(x)=(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o_{+\infty}(\frac{1}{x^3}))-\frac{1}{3}(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o_{+\infty}(\frac{1}{x^3}))^3+o_{+\infty}(\frac{1}{x^3})=\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}-\frac{1}{3x^3}+o_{+\infty}(\frac{1}{x^3})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+o_{+\infty}(\frac{1}{x^3})$, con parte principale $\frac{1}{x}$.

Come detto, l'uso di trascurabilità e asintoticità agevola notevolmente il calcolo dei limiti: terminiamo questo paragrafo dando un serie di esercizi ricapitolativi.

Esercizio. *Calcolare i seguenti limiti:*

$$(\mathbf{1})\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin^2 x}{x^{\frac{3}{2}}-2\log(1-x)},\quad (\mathbf{2})\ \lim_{x\to 1^+}\frac{\log x+e^x-e}{\cos\sqrt{x-1}-1},\quad (\mathbf{3})\ \lim_{x\to 0^+,+\infty}\frac{x\sqrt{1+x}-(x+2)\sqrt{x}}{x^\alpha}\ (\text{con }\alpha\in\mathbb{R})$$

$$(\mathbf{4})\ \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x\sin x)-\cosh x+1}{\sqrt[4]{1+2x^4}-1},\qquad (\mathbf{5})\ \lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x^x-e^e},\qquad (\mathbf{6})\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{2})}{\sqrt{x^2+x}-\log x}.$$

Risoluzione. **(1)** Si tratta di una forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Poiché $\sin x\sim_0 x$ si ha (Proposizione 3.2.17(iii)) $\sin^2 x\sim_0 x^2=o_0(x)$; inoltre $\log(1-x)\sim_0^* x$ e dunque $x^{\frac{3}{2}}=o_0(\log(1-x))$. Ne ricaviamo che il limite proposto è uguale a $\lim_{x\to 0}\frac{x}{-2\log(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{-2(-x)}=\frac{1}{2}$. **(2)** Si tratta di una forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Essendo $x-1$ infinitesimo, si ha $\log x=\log(1+(x-1))=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+o_1((x-1)^2)$, $e^x-e=e(e^{x-1}-1)=e((x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+o_1((x-1)^2)$ e $\cos\sqrt{x-1}-1=-\frac{(\sqrt{x-1})^2}{2}+o_1((x-1)^2)$: dunque le parti principali di numeratore e numeratore sono rispettivamente $(e+1)(x-1)$ e $-\frac{1}{2}(x-1)$ (dello stesso ordine), e perciò il limite vale $\frac{e-1}{-\frac{1}{2}}=-2(e-1)$. **(3)** Iniziamo dal limite per $x\to 0^+$. Il numeratore è infinitesimo, dunque se $\alpha\le 0$ il limite vale 0; se invece $\alpha>0$ si ha una forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Al numeratore, si nota subito che $x\sqrt{1+x}$ e $-x\sqrt{x}$ sono entrambi $o_0(2\sqrt{x})$, dunque il numeratore è asintotico a $-2\sqrt{x}$: pertanto il limite è uguale a $-2\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x^\alpha}=-2\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}-\alpha}$, ovvero a 0 per $\alpha<\frac{1}{2}$, a -2 per $\alpha=\frac{1}{2}$ e a $-\infty$ per $\alpha>\frac{1}{2}$. Passiamo ora al limite per $x\to+\infty$. Non è chiaro a cosa tenda il numeratore (è una forma indeterminata "$+\infty-\infty$"), dunque determiniamo la sua parte principale, iniziando dallo sviluppo asintotico di $\sqrt{1+x}$: si ha facilmente $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x}{x}}=1$ e poi,

proseguendo, $\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}$; ne ricaviamo $\sqrt{1+x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + o_{+\infty}(x^{-\frac{1}{2}})$. (Un metodo più semplice, usando il fatto che $t = \frac{1}{x}$ è infinitesimo e lo sviluppo asintotico di $(1+t)^{\frac{1}{2}}$, era di scrivere $\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{x}(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + o_{+\infty}(x^{-1})) = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + o_{+\infty}(x^{-\frac{1}{2}})$.) Tornando al numeratore, si ricava perciò $x\sqrt{1+x} - (x+2)\sqrt{x} = x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + o_{+\infty}(\sqrt{x}) - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \sim_{+\infty} -\frac{3}{2}\sqrt{x}$, e dunque il limite è uguale a $\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^\alpha} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}-\alpha}$, ovvero a $-\infty$ per $\alpha < \frac{1}{2}$, a $-\frac{3}{2}$ per $\alpha = \frac{1}{2}$ e a 0^- per $\alpha > \frac{1}{2}$. **(4)** Si tratta di una forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Si ha $\log(1 + x\sin x) = x\sin x - \frac{x\sin x}{2} + o_0((x\sin x)^2)$, e $x\sin x = x(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o_0(x^5)$: dunque $\log(1+x\sin x) = x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{2} + o_0(x^4) = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)$. D'altra parte, usando lo sviluppo di $\cosh x$ (che si calcola dunque subito come $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_0(x^{2n+1})$), il numeratore è $x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4) - 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o_0(x^4) + 1 \sim_0 \frac{x^2}{2}$; invece $\sqrt[4]{1+2x^4} = (1+2x^4)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}(2x^4) + o_0(2x^4) = 1 + \frac{1}{2}x^4 + o_0(x^4)$, e dunque il denominatore è asintotico a $\frac{1}{2}x^4$. Pertanto il limite è uguale a $\lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x^4/2} = +\infty$. **(5)** Si tratta di una forma indeterminata "$\frac{0}{0}$". Calcoliamo le parti principali di numeratore e denominatore. Per ricondurre il numeratore allo sviluppo del logaritmo che conosciamo (ovvero $\log t \sim_0 t$) possiamo scrivere $\log x - 1 = \log x - \log e = \log\frac{x}{e} = \log(1 + (\frac{x}{e} - 1))$; essendo $t = \frac{x}{e} - 1$ infinitesimo, si ha $\log x - 1 \sim_e (\frac{x}{e} - 1) = \frac{1}{e}(x - e)$. Quanto al denominatore, conviene scrivere $x^x - e^e = e^{\log(x^x)} - e^e = e^{x\log x} - e^e = e^e(e^{x\log x - e} - 1)$, ed essendo $t = x\log x - e$ infinitesimo si ottiene $e^{x\log x - e} - 1 \sim_e x\log x - e$; per sfruttare quanto appena trovato, conviene allora scrivere $x\log x - e = x(\log x - 1) + x - e = x(\frac{1}{e}(x-e) + o_e(x-e)) + (x-e) = (\frac{x}{e} + 1)(x-e) + o_e(x-e) \sim_e 2(x-e)$; perciò il denominatore $x^x - e^e$ è asintotico a $2e^e(x-e)$. Ne segue che il limite proposto è uguale a $\lim_{x\to e} \frac{\frac{1}{e}(x-e)}{2e^e(x-e)} = \frac{1}{2e^{e+1}}$. **(6)** Al denominatore si ha $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim_{+\infty} x$; dunque l'addendo $\log x$, essendo $o_{+\infty}(x) = o_{+\infty}(\sqrt{x^2+x})$, può essere trascurato, ed il denominatore è un infinito con parte principale x. Al numeratore, invece, si ha una forma indeterminata "$0\cdot+\infty$" che dobbiamo risolvere. Sappiamo che per ogni $x > 0$ sussiste l'identità $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, ma $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ e dunque $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$; quando $x \to +\infty$ si ha che $t = \frac{1}{x}$ è infinitesimo, e dunque $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{x^{2n+1}} + o_{+\infty}(\frac{1}{x^{2(n+1)}})$ è lo sviluppo asintotico di $\operatorname{arctg} x$ a $+\infty$; ne ricaviamo che il numeratore è $x\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x}))\right) = x(\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})) \sim_{+\infty} 1$, e perciò il limite proposto è uguale a $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0^+$.