Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)
Autoverifica su limiti, continuità, confronto locale

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

mercoledì 5 novembre 2014

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito mercoledì 12/11). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.
Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 36 pt (6×6 pt). **Ex. 2:** 24 pt (3×8 pt). **Ex. 3:** 18 pt (2×9 pt). **Ex. 4:** 22 pt. **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. Calcolare i seguenti limiti al variare[(1)] di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+1} e^{\frac{\alpha}{x}}\,; \quad \text{(b)}\ \lim_{x\to -\infty} (\sin x + \operatorname{arctg}(\alpha x))\,; \quad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1} \frac{\alpha - \cos(x^2-1)}{\log^2 x}\,;$$

$$\text{(d)}\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^2+3\cos x}\,; \quad \text{(e)}\ \lim_{x\to 0} \frac{2\alpha x - \sinh 3x + \sin x}{x\sqrt[3]{1+x^2} - e^x + 1}\,; \quad \text{(f)}\ \lim_{x\to 1} |x-1|^\alpha (\log(x+e-1) + \cos(\pi x))\,.$$

2. Delle seguenti funzioni di variabile reale $f_\alpha(x)$ determinare, al variare[(1)] di $\alpha \in \mathbb{R}$, il dominio e i limiti interessanti[(2)] in $\widetilde{\mathbb{R}}$.

$$\text{(a)}\ \alpha x - \sqrt{x^2-\alpha}\,; \qquad \text{(b)}\ \frac{e^x - e}{\sqrt{|x|^\alpha - 1}}\,; \qquad \text{(c)}\ \frac{|x|^\alpha \operatorname{arctg}(\pi x)}{\cos(3x) - 1}\,.$$

3. Determinare, delle seguenti funzioni, la parte principale in 0^+, 2, $+\infty$ rispetto a una opportuna scala di confronto (quella delle potenze reali, con o senza logaritmo e esponenziale).

$$\text{(a)}\ 2\cosh 3x - 1 - 2^x\,; \qquad \text{(b)}\ x\log|3x-5| + \cos 2x - \frac{2x-1}{x}\,.$$

4. Dire qual è il dominio D di $f(x) = \log|x^2 - 2x|$, e dov'è continua; calcolarne i limiti interessanti[(2)] e la fibra $f^{-1}(y)$ in un generico $y \in \mathbb{R}$, ricavandone l'espressione di un'inversa dopo un'opportuna (co)restrizione. Dare a priori tutte le informazioni possibili riguardo apertura, chiusura e limitatezza degli insiemi $A = \{x \in D : f(x) \geq 0\}$ e $B = \{x \in D : |f(x)| < 1\}$, poi calcolarli esplicitamente. Dato l'intervallo $I = [\frac{1}{2}, \frac{7}{4}]$ dire a priori com'è fatta l'immagine $f(I)$ e perché $f|_I$ ammette massimo e minimo assoluti; calcolare poi $f(I)$ e tali estremi assoluti con l'aiuto della fibra vista in precedenza.

[(1)] Trattare prima i casi $\alpha = \mp 1$, assegnandosi metà del punteggio; l'altra metà per la discussione al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
[(2)] Tipici limiti "interessanti" sono quelli in tutti punti di $\widetilde{\mathbb{R}}$ che sono di accumulazione per il dominio senza stare nel dominio; tipici limiti "non interessanti" sono quelli in tutti punti del dominio nei quali la funzione è continua.

Soluzioni.

1. In tutti gli esercizi discutiamo fin da subito al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$: le risposte per $\alpha = \mp 1$ si potranno desumere come casi particolari.

$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+1} e^{\frac{\alpha}{x}}}$ • Iniziamo da 0^+. Se $\alpha \le 0$ il limite è determinato e vale 0^+; se invece $\alpha > 0$, il cambio $t = \frac{\alpha}{x}$ dà $\lim_{t\to+\infty} \frac{\alpha^3}{t^2(t+\alpha)} e^t = \lim_{t\to+\infty} \alpha^3 \frac{e^t}{t^3} = +\infty$. • Similmente, il limite in 0^- vale 0^- se $\alpha \ge 0$, mentre se $\alpha < 0$ vale $-\infty$.

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} (\sin x + \operatorname{arctg}(\alpha x))}$ Quando x tende a $-\infty$ la funzione $\operatorname{arctg}(\alpha x)$ ha limite finito per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (rispettivamente $\frac{\pi}{2}$ se $\alpha < 0$, 0 se $\alpha = 0$ e $-\frac{\pi}{2}$ se $\alpha > 0$); d'altra parte $\sin x$ è limitata tra -1 e 1 ma non ha limite, dunque il limite proposto non esiste mai.

$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\alpha - \cos(x^2-1)}{\log^2 x}}$ Se $\alpha \neq 1$ il limite è determinato, e vale $(\operatorname{sign}(\alpha-1))\infty$. Se invece $\alpha = 1$ siamo in forma $\frac{0}{0}$, e ricordando che $1 - \cos t \sim_0 \frac{1}{2}t^2$ e $\log(1+t) \sim_0 t$ si ha $\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x^2-1)}{\log^2 x} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}(x^2-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2}(x+1)^2 = 2$.

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^2+3\cos x}}$ Al denominatore si ha $3\cos x = o_{+\infty}(x^2)$, dunque si può eliminare l'addendo $3\cos x$. Al numeratore, se $\alpha = 0$ si ha la costante $\log 2$; se $\alpha > 0$ si ha che x^α tende a $+\infty$ e dunque $x^\alpha + 1 \sim_{+\infty} x^\alpha$, da cui (essendo entrambi infiniti) si ricava $\log(1+x^\alpha) \sim_{+\infty} \log(x^\alpha) = \alpha \log x$; se $\alpha < 0$ si ha che x^α è un infinitesimo, dunque $\log(1+x^\alpha) \sim_{+\infty} x^\alpha$. Pertanto: se $\alpha > 0$ il limite è uguale a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha \log x}{x^2}$, che vale 0^+; se $\alpha = 0$ il limite è uguale a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log 2}{x^2}$, che pure vale 0^+; infine, se $\alpha < 0$ il limite è uguale a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}$, che ancora vale 0^+ (infatti $\alpha - 2 < 0$). In conclusione il limite vale 0^+ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{2\alpha x - \sinh 3x + \sin x}{x\sqrt[3]{1+x^2} - e^x + 1}}$ Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi, dunque vediamo qual è la loro parte principale. Il denominatore è $x(1+\frac{1}{3}x^2 + o_0(x^2)) - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)) + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$, dunque la parte principale è $-\frac{1}{2}x^2$. Quanto al numeratore, si ha $2\alpha x - (3x + \frac{1}{6}(3x)^3 + o_0((3x)^4)) + (x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4)) = 2(\alpha-1)x - \frac{14}{3}x^3 + o_0(x^4)$: dunque se $\alpha \neq 1$ la parte principale è $2(\alpha-1)x$, mentre se $\alpha = 1$ è $-\frac{14}{3}x^3$. Pertanto se $\alpha \neq 1$ il limite è uguale a $\lim_{x\to 0} \frac{2(\alpha-1)x}{-\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-4(\alpha-1))}{x} = \infty$ (col segno che dipende da quello di $\alpha - 1$ e dal lato del limite, ovvero $x \to 0^\mp$); se invece $\alpha = 1$ è uguale a $\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{14}{3}x^3}{-\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{28}{3}x = 0$ (più precisamente $0^\mp$ per il limite $x \to 0^\mp$).

$\boxed{\lim_{x\to 1} |x-1|^\alpha (\log(x+e-1) + \cos(\pi x))}$ Il fattore $\log(x+e-1) + \cos(\pi x)$ è infinitesimo; per trovarne la parte principale converrà cambiare la variabile del limite per farla tendere a 0. Ponendo $x = 1 + t$, il limite diventa $\lim_{t\to 0} |t|^\alpha (\log(e+t) + \cos(\pi t + \pi)) = \lim_{t\to 0} |t|^\alpha (\log(e+t) - \cos(\pi t))$. Ora, si ha $\log(e+t) = \log(e(1+\frac{t}{e})) = \log e + \log(1+\frac{t}{e}) = 1 + \frac{t}{e} + o_0(t)$ mentre $\cos(\pi t) = 1 - \frac{1}{2}(\pi t)^2 + o_0(t^3)$, dunque $\log(e+t) - \cos(\pi t) = \frac{1}{e}t + o_0(t) \sim_0 \frac{1}{e}t$, da cui il limite (ricordando che $t = |t|\operatorname{sign} t$) diventa $\lim_{t\to 0} |t|^\alpha \frac{1}{e}t = \lim_{t\to 0} \frac{1}{e}(\operatorname{sign} t)|t|^{\alpha+1}$, che per $t \to 0^\mp$ vale $0^\mp$ (se $\alpha > -1$), $\mp\frac{1}{e}$ (se $\alpha = -1$) e $\mp\infty$ (se $\alpha < -1$).

2. In tutti gli esercizi discutiamo fin da subito al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$: le risposte per $\alpha = 1$ si potranno desumere come casi particolari.

$\boxed{f_\alpha(x) = \alpha x - \sqrt{x^2 - \alpha}}$ Se $\alpha \le 0$ il dominio di $f_\alpha(x)$ è tutto $\mathbb{R}$, mentre se $\alpha > 0$ è dato da $]-\infty, -\sqrt{\alpha}] \cup [\sqrt{\alpha}, +\infty[$; in entrambi i casi, comunque, i soli limiti interessanti sono in $\mp\infty$ (infatti quando $\alpha > 0$ la funzione è continua in $\mp\sqrt{\alpha}$, dunque $\lim_{x\to\mp\sqrt{\alpha}\mp} f_\alpha(x) = f_\alpha(\mp\sqrt{\alpha}) = \mp\alpha\sqrt{\alpha}$). Trattiamo subito il caso $\alpha = 0$, in cui si ottiene $f_0(x) = -|x|$ e dunque $\lim_{x\to\mp\infty} f_0(x) = -\infty$; d'ora in poi supporremo $\alpha \neq 0$. • In $c = +\infty$, essendo $t := -\frac{\alpha}{x^2}$ infinitesimo si ha $\sqrt{x^2-\alpha} = x\sqrt{1+t} = x(1 + \frac{1}{2}t + o_0(t)) = x - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$, perciò $f_\alpha(x) = (\alpha-1)x + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$: bisogna pertanto distinguere i casi $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 1$. Se $\alpha = 1$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{x}$, da cui $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0^+$. Se invece $\alpha \neq 1$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} (\alpha-1)x$, da cui $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \operatorname{sign}(\alpha-1)\infty$. • In $c = -\infty$, poiché se $x < 0$ si ha $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ si ottiene $\sqrt{x^2-\alpha} = -x\sqrt{1+t} = -x + \frac{\alpha}{2}\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$ da cui $f_\alpha(x) = (\alpha+1)x - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$, dunque se $\alpha = -1$ si ha $\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{x}) = 0^-$ mentre se $\alpha \neq -1$ si ha $\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha+1)x = -\operatorname{sign}(\alpha+1)\infty$.

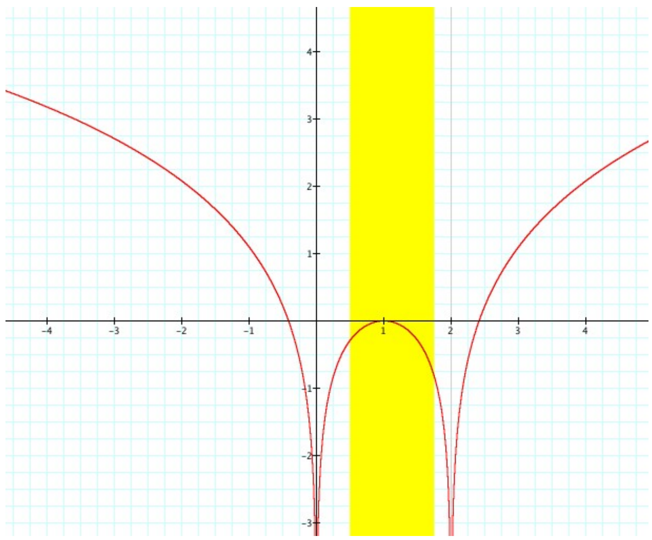
$\boxed{f_\alpha(x) = \frac{e^x - e}{\sqrt{|x|^\alpha - 1}}}$ Deve essere $\alpha \neq 0$. Il dominio è dato da $|x|^\alpha > 1$, ovvero $|x| > 1$ se $\alpha > 0$, e $|x| < 1$ se $\alpha < 0$: distinguiamo dunque i casi $\alpha \gtrless 0$. • Se $\alpha > 0$ i limiti interessanti sono in $-\infty$, -1^-, 1^+ e $+\infty$: si ha $\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)$ $[= \frac{-e}{+\infty}] = 0^-$, $\lim_{x\to-1^-} f_\alpha(x)$ $[= \frac{\frac{1}{e}-e}{0^+}] = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f_\alpha(x)$ $[= \frac{0^+}{0^+}] = \lim_{t\to0^+} \frac{e^{t+1}-e}{\sqrt{(1+t)^\alpha - 1}} = \lim_{t\to0^+} \frac{e(e^t-1)}{t}\sqrt{t}\sqrt{\frac{t}{(1+t)^\alpha-1}}$ $[= \frac{e}{\alpha}\cdot 0^+] = 0^+$ e $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$. • Se invece $\alpha < 0$ i limiti interessanti sono in -1^+ e 1^-: si ha $\lim_{x\to-1^+} f_\alpha(x) = \frac{\frac{1}{e}-e}{0^+}] = -\infty$ e $\lim_{x\to1^-} f_\alpha(x)$ $[= \frac{0^-}{0^-}] = \lim_{t\to0^-} \frac{e^{t+1}-e}{\sqrt{(1+t)^\alpha-1}} = \lim_{t\to0^-} \frac{e(e^t-1)}{t}(-\sqrt{|t|})\sqrt{\frac{|t|}{(1+t)^\alpha-1}}$ $[= \frac{e}{\alpha}\cdot 0^-] = 0^-$.

$\boxed{f_\alpha(x) = \frac{|x|^\alpha \operatorname{arctg}(\pi x)}{\cos(3x)-1}}$ Il dominio è dato da $\cos(3x) \neq 1$, ovvero tutto $\mathbb{R}$ meno i punti $c_k = \frac{2k\pi}{3}$ (con $k \in \mathbb{Z}$), tra i quali è compreso anche $c_0 = 0$. Notando che nel dominio il numeratore non si annulla mai e ha lo stesso segno di x mentre il denominatore è negativo, per $k \neq 0$ si ha $\lim_{x\to c_k} f_\alpha(x)$ $[= \frac{|x_k|^\alpha \operatorname{arctg}\pi x_k}{0^-}] = -(\operatorname{sign} k)\,\infty$. Quanto al punto particolare $c_0 = 0$, ricordando che $x = (\operatorname{sign} x)|x|$, che $1 - \cos t \sim_0 \frac{1}{2}t^2$ e che $\operatorname{arctg} t \sim_0 t$, si ha $\lim_{x\to0^\mp} \frac{|x|^\alpha \operatorname{arctg}(\pi x)}{\cos(3x)-1} = \lim_{x\to0^\mp} \frac{|x|^\alpha(\pi x)}{-\frac{1}{2}(3x)^2} = \lim_{x\to0^\mp} \frac{|x|^{\alpha+1}(\pi \operatorname{sign} x)}{-\frac{9}{2}|x|^2} = \lim_{x\to0^\mp}(-\frac{2\pi}{9}\operatorname{sign} x)|x|^{\alpha-1}$, che se $\alpha > 1$ vale $0^\pm$, se $\alpha = 1$ vale $\pm\frac{2\pi}{9}$ e se $\alpha < 1$ vale $\pm\infty$. Vediamo ora il limite in $+\infty$. Quando $x > 0$ la funzione è negativa, e ci conviene distinguere i casi a seconda del segno di α. • Se $\alpha > 0$ si ha che $|x|^\alpha$ tende a $+\infty$, ed essendo (per x sufficientemente grande, così che $\operatorname{arctg}\pi x > 1$) $|f_\alpha(x)| > \frac{|x|^\alpha}{2}$ ne deduciamo che $|f_\alpha(x)|$ tende a $+\infty$, e dunque $f_\alpha(x)$, negativa, tende a $-\infty$. In modo analogo si prova che $\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x) = +\infty$. • Se $\alpha \le 0$, il numeratore tende a $\frac{\pi}{2}$ (se $\alpha = 0$) o è infinitesimo (se $\alpha < 0$), e ricordiamo che però nei punti c_k la funzione tende a $-\infty$: questo ci fa pensare che il limite non esista. In effetti, basta notare che sui punti $x'_n = \pi + 2n\pi$, che tendono a $+\infty$ nel dominio, la funzione vale $f(x'_n) = \frac{|x'_n|^\alpha \operatorname{arctg}(\pi x'_n)}{-2}$, dunque se $\alpha = 0$ si ha $\lim f(x'_n) = \frac{1\cdot\frac{\pi}{2}}{-2} = -\frac{\pi}{4}$ mentre se $\alpha < 0$ si ha $\lim f(x'_n) = 0^-$; d'altra parte, poiché $\lim_{x\to c_k} f_\alpha(x) = -\infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, è immediato costruire un'altra successione di punti x''_n tendenti a $+\infty$ nei quali si abbia $\lim f(x''_n) = -\infty$ (ad esempio $x''_n := c_n - \frac{1}{n}$). Dunque $\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x)$ non esiste; allo stesso modo si prova che anche $\lim_{x\to-\infty} f_\alpha(x)$ non esiste.

3. $\boxed{2\cosh 3x - 1 - 2^x}$ In 0 la funzione $f(x) = 2\cosh 3x - 1 - 2^x$ è infinitesima, e (essendo $2^x = e^{x\log 2}$, con $t = x\log 2$ infinitesimo) diventa $2(1 + \frac{1}{2}(3x)^2 + o_0((3x)^3)) - 1 - (1 + x\log 2 + \frac{1}{2}(x\log 2)^2 + o_0(x^2)) = -(\log 2)\,x + o_0(x)$: dunque la parte principale in 0 è $-(\log 2)\,x$. In 2 la funzione è finita (il limite per continuità coincide col valore $f(2) = 2\cosh 6 - 5$): e la parte principale in 2 è proprio questa costante $2\cosh 6 - 5$. Infine, notando che in $+\infty$ si ha $2\cosh 3x = 2\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2} \sim_{+\infty} e^{3x}$ e dunque $-1 - 2^x = o_{+\infty}(2\cosh 3x)$, si ricava $f(x) \sim_{+\infty} 2\cosh 3x \sim_{+\infty} e^{3x} = x^0 e^{3x}$, che è anche la parte principale (nella scala che comprende gli esponenziali).

$\boxed{x\log|3x-5| + \cos 2x - \frac{2x-1}{x}}$ In 0 la funzione $f(x) = x\log|3x-5| + \cos 2x - \frac{2x-1}{x}$ è infinita a causa dell'addendo $-\frac{2x-1}{x}$ (gli altri addendi sono infinitesimi o finiti), dunque $f(x) \sim_0 -\frac{2x-1}{x} = -2 + \frac{1}{x} \sim_0 \frac{1}{x}$, che è la parte principale in 0. In 2 la funzione è finita, e per continuità la parte principale in 2 è $f(2) = \cos 4 - \frac{3}{2}$. Infine, in $+\infty$ vi è un solo addendo infinito, ovvero $x\log|3x-5|$, mentre $\cos 2x$ è limitato e $-\frac{2x-1}{x}$ finito: pertanto $f(x) \sim_{+\infty} x\log|3x-5| \sim_{+\infty} x\log(3x) = x(\log x + \log 3) \sim_{+\infty} x\log x$, che è anche la parte principale (nella scala di potenze che comprende i logaritmi).

4. (I risultati di questo esercizio si comprenderanno meglio guardando la figura.) Il dominio di $f(x) = \log|x^2 - 2x|$ è $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; la funzione è continua in ogni punto di D, e si ha $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to2} f(x) = -\infty$. La fibra di f in $y \in \mathbb{R}$ è data da $f(x) = y$, ovvero $\log|x^2-2x| = y$, che (senza condizioni su y) equivale a $|x^2 - 2x| = e^y$, ovvero $x^2 - 2x = \pm e^y$: se $x^2 - 2x = e^y$ si ricava $x = 1 \pm \sqrt{1+e^y}$ (sempre senza condizioni su y), mentre se $x^2 - 2x = -e^y$ si ottiene $x = 1 \pm \sqrt{1-e^y}$ (però con la condizione $1 - e^y \ge 0$, ovvero $y \le 0$). Pertanto se $y > 0$ si ha $f^{-1}(y) = \{x_1(y) = 1 - \sqrt{1+e^y},\ x_2(y) = 1 + \sqrt{1+e^y}\}$, mentre se $y \le 0$ si ha $f^{-1}(y) = \{x_1(y) = 1 - \sqrt{1+e^y},\ x_2(y) = 1 + \sqrt{1+e^y},\ x_3(y) = 1 - \sqrt{1-e^y},\ x_4(y) = 1 + \sqrt{1-e^y}\}$ (va detto che per $y = 0$ si ha $x_3(0) = x_4(0) = 1$, mentre per tutti gli altri $y \neq 0$ le antiimmagini sono punti distinti). La funzione dunque è suriettiva ma non iniettiva; per renderla tale, restringiamone il dominio ad esempio a $D' =]2, +\infty[$ (si noti infatti che solo $x_2(y) = 1 + \sqrt{1+e^y} \in D'$). Dunque $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$ è iniettiva, e resta suriettiva (infatti ogni $y \in \mathbb{R}$ ha la sua antiimmagine $x_2(y)$), ed è perciò una biiezione: essendo D' un intervallo e $f|_{D'}$ continua, sappiamo che iniettività equivale a stretta monotonìa (in questo caso, stretta crescenza) e implica che $f|_{D'}$ è un omeomorfismo tra $D' =]2, +\infty[$ e $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$; l'inversa sarà ovviamente $(f|_{D'})^{-1} : \mathbb{R} \to D'$ data da $(f|_{D'})^{-1}(y) = x_2(y) = 1 + \sqrt{1+e^y}$. L'insieme $A = \{x \in D : f(x) \ge 0\}$ non sarà certo limitato, perché sappiamo che $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$; poiché f è continua su D sappiamo che A è un chiuso di D, ovvero esiste un chiuso C di $\mathbb{R}$ tale che $A = D \cap C$ (però, essendo D un aperto di $\mathbb{R}$, non è detto che A sia un chiuso anche di $\mathbb{R}$).[3] Quanto a $B = \{x \in D : |f(x)| < 1\} = \{x \in D : -1 < f(x) < 1\}$ non possiamo pronunciarci sulla limitatezza; sarà comunque un aperto di D (ed essendo D un aperto di $\mathbb{R}$, B sarà aperto anche di $\mathbb{R}$)[3]. Per il conto, si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|x^2 - 2x| \geq 1$ (con $x \neq 0, 2$), ovvero se e solo se $x^2 - 2x \geq 1$ oppure $x^2 - 2x \leq -1$ (con $x \neq 0, 2$), ovvero se e solo se $x^2 - 2x - 1 \geq 0$ oppure $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \leq 0$ (con $x \neq 0, 2$), che dà $A =]-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [1+\sqrt{2}, +\infty[$ (si noti che A è comunque un chiuso di $\mathbb{R}$, il che non era detto), mentre $|f(x)| < 1$ se e solo se $\frac{1}{e} < |x^2 - 2x| < e$ (con $x \neq 0, 2$), che dopo calcoli porge $B = (]1-\sqrt{1+e}, 1-\sqrt{1+\frac{1}{e}}[\cup]1-\sqrt{1-\frac{1}{e}}, 1+\sqrt{1-\frac{1}{e}}[\cup]1+\sqrt{1+\frac{1}{e}}, 1+\sqrt{1+e}[)$ (aperto di $\mathbb{R}$, e limitato). Infine l'intervallo $I = [\frac{1}{2}, \frac{7}{4}]$ è un sottoinsieme compatto (chiuso e limitato) interamente contenuto nel dominio di f, nel quale f è continua: dunque anche $f(I)$ sarà un intervallo compatto, e dunque (Weierstrass) $f|_I$ ammetterà massimo e minimo assoluti. Per cercare l'immagine $f(I) = \{y \in \mathbb{R} : \text{esiste } x \in [\frac{1}{2}, \frac{7}{4}] \text{ tale che } f(x) = y\}$ risolviamo le quattro condizioni indipendenti $\frac{1}{2} \leq x_j(y) \leq \frac{7}{4}$ (per $j = 1, 2, 3, 4$). Per $j = 1, 2$ queste condizioni diventano $\frac{1}{2} \leq 1 \mp \sqrt{1+e^y} \leq \frac{7}{4}$ che non danno soluzioni in y; per $j = 3, 4$ (con $y \leq 0$) si ha $\frac{1}{2} \leq 1 \mp \sqrt{1-e^y} \leq \frac{7}{4}$, che danno $-\frac{1}{2} \leq -\sqrt{1-e^y}$ oppure $\sqrt{1-e^y} \leq \frac{3}{4}$, ovvero $y \geq -(2\log 2 - \log 3) \sim -0{,}3$ oppure $y \geq -(4\log 2 - \log 7) \sim -0{,}8$, che nella condizione $y \leq 0$ danno $f(I) = [-(4\log 2 - \log 7), 0]$. Pertanto il massimo assoluto di f sul compatto I è 0 (assunto in $x = 1 \in I$) e il minimo assoluto è $-(4\log 2 - \log 7)$ (assunto in $x = \frac{7}{4} \in I$).



Esercizio 4: il grafico della funzione f (rosso) e la zona dell'intervallo I.

---

[3] In generale, è facile dimostrare che se $S \subset \mathbb{R}$ è un aperto (risp. chiuso) e $T \subset S$ è un sottoinsieme aperto (risp. chiuso) in S, allora T è aperto (risp. chiuso) anche in $\mathbb{R}$. Lo stesso vale con $\widetilde{\mathbb{R}}$ al posto di $\mathbb{R}$.