

ANALISI MATEMATICA I

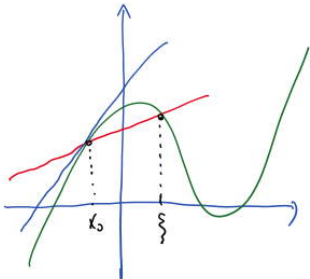
Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di lunedì 10/11/2014

DERIVAZIONE, CALCOLO DIFFERENZIALE

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ di accum. per A , $f: A \rightarrow \mathbb{R}$



$\frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$ **RAPPORTO INCREMENTALE:**
il coeff. angolare ("pendenza")
della retta passante per i due punti
del grafico $(x_0, f(x_0))$ e $(\xi, f(\xi))$

Poiché x_0 è di accum. per A , ha senso considerare
il limite di tale quantità per $\xi \rightarrow x_0$.

Tale limite, se esiste finito, mi dà la **PENDENZA DELLA RETTA TANGENTE** al grafico:

$$f'(x_0) = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$h = \xi - x_0$ incremento

DERIVATA
di f in x_0

(Altra notazione frequente è $\frac{df}{dx}(x_0)$, cioè: $\frac{\text{variazione (infinitesimale!) di } f(x) \text{ da } f(x_0)}{\text{variazione infinitesima di } x \text{ da } x_0}$.)

Si dirà in tal caso che f è **DERIVABILE** in x_0 (idea geometrica: c'è retta tg. al grafico).

Notiamo subito che la derivabilità equivale al fatto che

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ (che sarà } a = f'(x_0) \text{) t.c. } \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} - a \xrightarrow{\xi \rightarrow x_0} 0$$

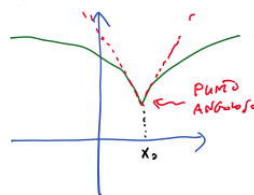
ovvero $f(\xi) - f(x_0) = a(\xi - x_0) + \theta_{x_0}(\xi - x_0)$

$$f(\xi) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (\xi - x_0) + \theta_{x_0}(\xi - x_0)$$

DIFFERENZIABILITÀ IN x_0
idea: la funz. $f(\xi)$
è efficacemente approssimata
vicino a x_0 dalla funz.
lineare $f(x_0) + f'(x_0)(\xi - x_0)$
a meno di errori "trascurabili"

Naturalmente, se in ogni limite, la derivata in x_0 può non esistere, ad esempio quando i limiti dx e sx esistono ma sono diversi tra loro

$$f'_\pm(x_0) := \lim_{\xi \rightarrow x_0^\pm} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \quad \begin{array}{l} \text{DERIVATA Dx/Sx} \\ \text{per } f \text{ in } x_0 \\ (\text{SE I LIMI. SONO FINITI!}) \end{array}$$



Sembra che con la derivabilità si voglia fare un salto di qualità rispetto alla continuità: le funzioni non solo "non deve fare salti", ma "deve procedere in modo LISCIO così da poter definire una retta Tangente". Ed è proprio così:

Prop. | Una funzione derivabile in x_0 è anche continua in x_0 (ma il viceversa no).

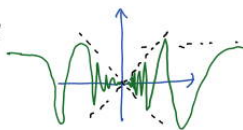
$$\text{Dim.} \quad f(\xi) - f(x_0) = \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \cdot (\xi - x_0) \xrightarrow{\xi \rightarrow x_0} 0 \quad \text{ovvero}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x_0} (f(\xi) - f(x_0)) = 0, \text{ ovvero } f \text{ è continua in } x_0.$$

Il viceversa è falso: ad es. in un punto angoloso

(ex: $x_0 = 0$ per $f(x) = |x|$),

oppure $x_0 = 0$ per $g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



g è continua in $x_0 = 0$ ($\lim_{\xi \rightarrow 0} g(\xi) = 0 = g(0)$)

$$\text{ma non è derivabile in nessuno dei due lati: } \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{\xi \sin \frac{1}{\xi} - 0}{\xi - 0} = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{\xi} \text{ che non esiste.} \quad \square$$

Lo possiamo calcolare la derivata di una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ in tutti i punti di A in cui ciò è possibile ($A' = \{x \in A : f \text{ è deriv. in } x\} \subseteq A$):
i derivati che in questo modo otterremo una nuova funzione

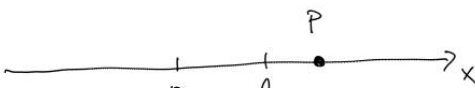
$$f': A' \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) \quad (\text{FUNZIONE}) \text{ DERIVATA di } f$$

Prop. | Se f è pari/dispari, allora f' è dispari/pari

Dim. Sia ad es. f pari: mostriamo che f' è dispari.

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{\xi \rightarrow -x} \frac{f(\xi) - f(-x)}{\xi - (-x)} \stackrel{\eta := -\xi}{=} \lim_{\eta \rightarrow x} \frac{f(-\eta) - f(-x)}{-\eta + x} \\ &\stackrel{f \text{ pari}}{=} \lim_{\eta \rightarrow x} \left(- \frac{f(\eta) - f(x)}{\eta - x} \right) = -f'(x). \quad \square \end{aligned}$$

Ex



legge oraria $x(t)$

$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ VELOCITA' MEDIA del punto tra gli istanti t e t_0 .

$x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$ VELOCITA' ISTANTANEA a t_0 .

Nelle seguenti tabelle elenchiamo le funzioni derivate delle funzioni elementari.

TABELLA DELLE DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

- $f(x) \equiv k \text{ costante} \Rightarrow (k)' \equiv 0$
- $f(x) = x^a$, $A = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & \text{se } a > 0 \\ \mathbb{R}_{> 0} & \text{se } a < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$ se $0 < a < 1$
sine $x \neq 0$
- $f(x) = |x|$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \text{sign } x$ per $x \neq 0$
- $f(x) = a^x$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$
- $f(x) = \log_a x$, $A = \mathbb{R}_{> 0} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
- $f(x) = \sin x$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x$, $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $f(x) = \cot x$, $A = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $f(x) = \arcsin x$, $A = [-1, 1] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per $x \neq \pm 1$
- $f(x) = \arccos x$, $A = [-1, 1] \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ per $x \neq \pm 1$
- $f(x) = \text{arctg } x$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \sinh x$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \cosh x$
- $f(x) = \cosh x$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \sinh x$
- $f(x) = \ln \sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $A = \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- $f(x) = \ln \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $A = \mathbb{R}_{\geq 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ per $x \neq 1$

Dim. Si sfruttano i limiti notevoli: ad es, se $x > 0$ si ha

$$(x^a)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^a - x^{a-h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} =$$

$$= x^a \frac{(1+h/x)^a - 1}{h} = x^{a-1} \frac{(1+h/x)^a - 1}{h/x} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a x^{a-1}$$

e se $x \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) si ha

$$(\tan x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{h \cos(x+h)\cos x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin((x+h)-x)}{h \cos(x+h)\cos x} \xrightarrow{\sin t \sim t} \frac{1}{\cos^2 x}$$

eccellente. □

Riassumiamo le proprietà fondamentali delle derivate:

Prop. Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in un punto $x \in A$

(i) (LINEARITÀ) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, anche $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x e vale

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

Ex Polinomio $h(x) = 5x^3 - 3x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 1 - (-2x^{-3})$

(ii) (PRODOTTO: REGOLA DI LEIBNIZ). Anche fg è derivabile in x , e vale

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

In generale,

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(x) = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)\cdots f_{n-1}'(x)f_n(x)$$

Ex $h(x) = 2^x \cos x \cdot \ln x \Rightarrow h'(x) = 2^x (\ln 2) \cdot \cos x \cdot \ln x - 2^x \sin x \cdot \ln x + \frac{2^x \cos x}{x}$

(iii) (Quoziente e reciproco). Se $g(x) \neq 0$ e f/g è definita ^(permanenza del segno) all'int. di x

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

In particolare $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

Ex. $h(x) = \frac{x^3 \log x}{\cos x} \Rightarrow h'(x) = \frac{(x^3 \log x)' \cos x - x^3 \log x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}$
 $= \frac{(3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x}) \cos x + x^3 \log x \sin x}{\cos^2 x}$

(iv) (COMPOSIZIONE: REGOLA DELLA CATENA, "CHAIN RULE")

Se φ è una funzione derivabile in $f(x)$, e $\varphi \circ f$ è derivabile e vale

$$(\varphi \circ f)'(x) = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Più in generale

$$(\varphi_n \circ \varphi_{n-1} \circ \dots \circ \varphi_1 \circ f)'(x) = \varphi_n'(\varphi_{n-1}(\dots(\varphi_1(f(x)))) \cdot \varphi_{n-1}'(\varphi_{n-2}(\dots(\varphi_1(f(x)))) \cdot \dots \cdot \varphi_1'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ex. • $h(x) = e^{2x}$ ($\varphi = \exp$, $f = 2x$) $\Rightarrow h'(x) = \exp'(2x) \cdot (2x)' = 2e^{2x}$
 • $h(x) = \log(\cos x)$ ($\varphi = \log$, $f = \cos$) $\Rightarrow h'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$
 • $h(x) = \cos(\log x)$ ($\varphi = \cos$, $f = \log$) $\Rightarrow h'(x) = -\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{\sin(\log x)}{x}$

(v) (FUNZIONE INVERSA)

Se f è un omeomorfismo, la funzione inversa f^{-1} è derivabile in un punto $y = f(x)$ se e solo se $f'(x) \neq 0$, e vale

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \left[A \xrightleftharpoons[f^{-1]}{f} B \quad \begin{array}{l} x \in A \\ \Rightarrow y = f(x) \in B \end{array} \right]$$

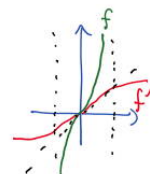
Ex. • $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ $f(x) = \exp(x) \rightsquigarrow f^{-1}(y) = \log y$
 $\log'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}$

• $f:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$, $f^{-1}(y) = \arctan y$

$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1+y^2}$

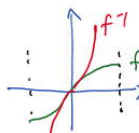
$\left[\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \tan^2 \theta = \frac{1-\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \right]$



• $f: [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$

$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, $f^{-1}(y) = \arcsin y$

$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$



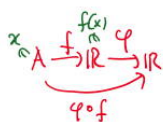
Dim. (i) linearità: ovvio per le linearità del limite

(ii) linearità: $\frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi)(g(\xi) - g(x)) + g(x)(f(\xi) - f(x))}{\xi - x}$
 $\xrightarrow{\xi \rightarrow x} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(iii) Quoziente: idem

(iv) f derivabile in x : $f(\xi) \stackrel{(*)}{=} f(x) + f'(x) \cdot (\xi - x) + o(\xi - x)$

φ deriv. in $f(x)$: $\varphi(\eta) = \varphi(f(x)) + \varphi'(f(x)) \cdot (\eta - f(x)) + o(\eta - f(x))$



stituenti $\eta = f(\xi)$ (Tornare a $f(x)$): $\left[\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \mapsto \varphi(f(x)) \end{array} \right]$

$\varphi(f(\xi)) = \varphi(f(x)) + \varphi'(f(x)) \cdot (f(\xi) - f(x)) + o(f(\xi) - f(x))$

per motivi (*) al pot. di $f(\xi)$, ottergo (e vol. fuori)

$\varphi(f(\xi)) = \varphi(f(x)) + (\varphi'(f(x)) \cdot f'(x)) \cdot (\xi - x) + p(\xi) \cdot (x - \xi)$

ove $p(\xi) = \varphi'(f(x)) \cdot o(\xi) + o(f(\xi)) \cdot (f'(x) + o(\xi))$

che tende a 0 quando $\xi \rightarrow x$. Dunque ci siamo.

(v) Scriviamo il rappo. mancante per la funz. inversa:

$\lim_{\eta \rightarrow y} \frac{f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y)}{\eta - y} = \left[\text{uso il cambio} \right] \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{\xi - x}{f(\xi) - f(x)}$

che esiste finito $\Leftrightarrow$ esiste finito quello del $\frac{0}{0}$ -m. $\Leftrightarrow f'(x) \neq 0$

e in tal caso dà le der.

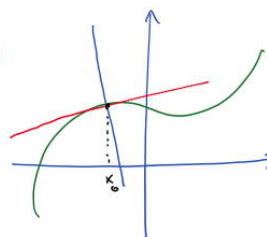
□

RETTA TANGENTE E PERPENDICOLARE A UN GRAFICO

Dalle formule delle rette per un p.u. $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{TG.}$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) \quad \text{PERP. (se } f'(x_0) \neq 0 : x = x_0)$$



Es. | Qual'è la retta tangente al grafico di $f(x) = \frac{x-2}{3-2x}$ che è ortogonale alla retta $4x - y + 5 = 0$?

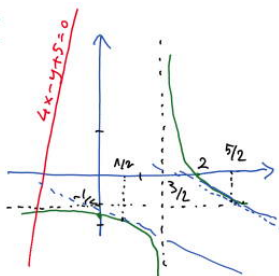
$$f'(x) = \frac{(x-2)'(3-2x) - (x-2)(3-2x)'}{(3-2x)^2} = \frac{1 \cdot (3-2x) - (-2)(x-2)}{(3-2x)^2}$$

$$= \frac{3-2x+2x-4}{(3-2x)^2} = \frac{-1}{(3-2x)^2} < 0$$

$$\text{Gnd. } -\frac{1}{(3-2x)^2} = -\frac{1}{4} \quad 3-2x = \pm 2 \quad \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

$$\text{Tangenti: } x_1 = 5/2: y - f(5/2) = -\frac{1}{4}(x - 5/2), \text{ cioè } y = -\frac{1}{4}x + 3/8$$

$$x_2 = 1/2: y - f(1/2) = -\frac{1}{4}(x - 1/2), \text{ cioè } y = -\frac{1}{4}x + 5/8$$

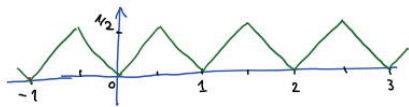


UNA FUNZ. CONTINUA È DERIVABILE "QUALI OVUNQUE"?

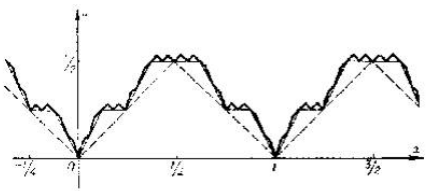
(ovvero: "ovunque tranne una famiglia di punti isolati")

No! Von der Waerden ha costruito una funz. $\phi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua ma non derivabile in alcun punto di $\mathbb{R}$

Idea: somma infinita di funzioni "a sega" di passo sempre più piccolo:

se $u_0(x)$ è  si pone:

$$\phi_w(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_0(4^k x)}{4^k}$$

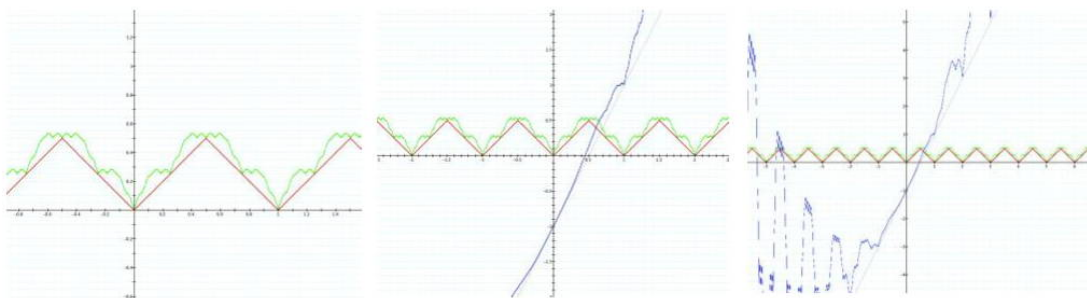
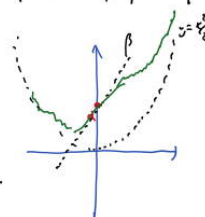


con $\phi_w(x)$ è ad esempio facile scrivere una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R}$ ma derivabile solo in $x=0$, con prescritti $f(0)=\alpha$, $f'(0)=\beta$:

$$f(x) = \alpha + \beta x + x^2 \phi_w(x)$$

$$\text{val } f(0) = \alpha; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta x + x^2 \phi_w(x)}{x} = \beta$$

ma la non derivabilità al di fuori di $x=0$ non viene salvata.



(Nelle figure: • in **rosso** la funzione a sega $u_0(x)$
 • in **verde** la funzione $\phi_w(x)$ di Von der Waerden
 • in **blu** la funzione $f(x) = -1 + 2x + x^2 \phi_w(x)$
 (ovvero con $\alpha = -1$ e $\beta = 2$) in due ingrandimenti, confrontata con la funzione lineare $-1 + 2x$ rappresentata in grigio).

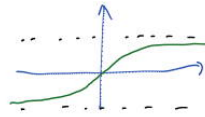
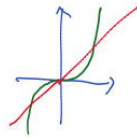
DIFFEOMORFISMO : funzioni $f: A \rightarrow B$ biettive, derivabili e f^{-1} derivabile.

Per quanto detto sulla derivata di funzione inversa, è chiaro che:

Prop. $f: A \rightarrow B$ omeomorfismo $\Leftrightarrow$ anche diffeom. $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ derivabile} \\ \text{e } f'(x) \neq 0 \forall x \in A \end{cases}$

Ex. • $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ è diffe.

• $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x^3$
 è omeo per la sterna. crescente
 ma non differ. perché $g'(0) = 0$



Invece $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \underline{x}$ è omeo diffeomorfismo.