ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di martedì 11/11/2014

DERIVATE E CRESCENZA

Data una funzione $f: X \to \mathbb{R}$ (ove X è un insieme QUALUNQUE), dovremmo avere chiare le nozioni di punto di max/min stretto (o FORTE) / lato (o DEBOLE):

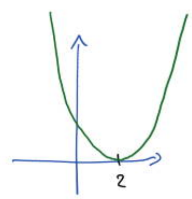
- $x_0 \in X$ è pto di minimo stretto se $f(x_0) < f(x)$ $\forall x \in X, x \neq x_0$
- $x_0 \in X$ è pto di massimo lato se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in X$.

Inoltre deve essere chiara la distinzione tra punto di max/min (nel dominio!) e (valore) max/min (nel codominio!)

$\boxed{\text{Ex.}}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2$

$x_0 = 2$ è pto di min. stretto e

$y = 0$ è min. stretto per f



$\boxed{\text{Ex.}}$ $g: \underset{\text{esseri umani}}{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$, $g(x)$ = età di x (in anni)

Matusalemme è pto di max stretto, con max = g(Matusalemme) = 525

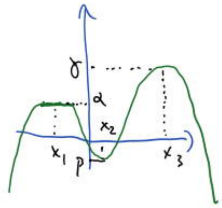
I neonati sono pti di min lato (sono tanti!), con min = 0.

Consideriamo ora funzioni di variabile reale.

Se $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ si dirà PUNTO DI MAX/MIN LOCALE (o RELATIVO) per f se esiste un intorno U di x_0 t.c. x_0 sia punto di max/min. per $f|_{A \cap U}$

se questo fatto continua a permanere su tutto il dominio A, parleremo di PTO DI MAX / MIN GLOBALE (o ASSOLUTO)

Ex.



x_1 è punto di max locale lasco

x_2 è pto di min locale stretto

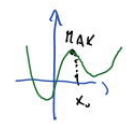
x_3 è pto di max locale stretto, anzi addirittura pto di max globale stretto.

Idem per i valori: α è max. locale lasco, β min. loc. stretto, γ max globale stretto per f.

Ma <u>quali sono i legami tra crescenza ed estremi relativi</u>?

Un fatto naturale:

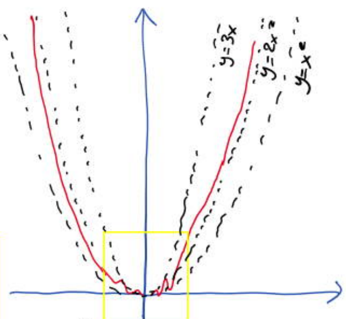
Prop. Se f è crescente all'intorno sx di x_0 e decrescente all'intorno dx, allora x_0 è punto di max relativo per f; inoltre se crescenza e decr. sono strette, x_0 è pto max rel. stretto.



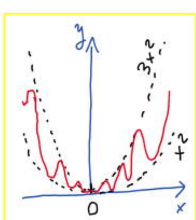
Ciò è ovvio. La cosa interessante è: È VERO IL VICEVERSA?

La risposta è NO. Es.: $f(x) = \begin{cases} \left(2+\sin\frac{1}{x}\right)x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Per $x \to 0$ la f oscilla tra x^2 e $3x^2$, e per $x \to \infty$ è asintotica a $2x^2$ (ma non asintoto)



Evidentemente $x=0$ è pto di min rel. stretto (addirittura di min. globale!) per f ma non esiste alcun intorno di $x=0$ in cui f decresce a sx e cresca a dx!



Notiamo che f, oltre che continua, è anche derivabile in $x=0$ (negli altri pti ciò è ovvio)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0 =: f'(0).$$

Questa osservazione mostra che bisogna essere piuttosto cauti nei legami tra crescenza ed esistenza di estremi locali.

D'altra parte, è naturale aspettarsi un forte legame tra crescenza e segno della derivata, grazie alla seguente ovvia

Prop. Se A è intervallo e $f: A \to \mathbb{R}$, allora
f è crescente in A $\iff$ tutti i rapporti incrementali di f in A sono ≥ 0.

Dim. f crescente in A $\iff$ $f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 > x_2$

$$\iff \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 > x_2$$

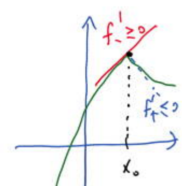
$$\iff \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2. \quad \square$$

Cerchiamo allora di enunciare questi legami con prudenza e precisione.

Prop. Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ di accumulazione per A.

(i) (DERIVATA ED ESTREMI LOCALI)

Se x_0 è un pto di max locale, allora (se esistono) $f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$; idem se x_0 è pto di min. loc.

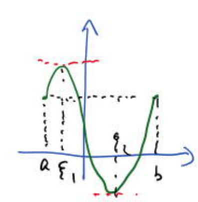


Dunque, in particolare, (se esiste), $f'(x_0) = 0$.

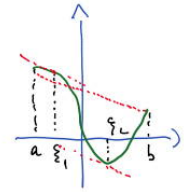
[per funzioni derivabili, gli estremanti sono punti stazionari]

Corollari:

TEOREMA DI ROLLE. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $]a,b[$.
Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists\ a < \xi < b$ t.c. $f'(\xi) = 0$

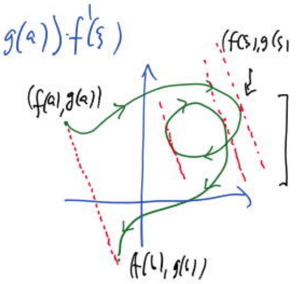


(TEOREMA DELLA MEDIA)
TEOREMA DI LAGRANGE. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $]a,b[$.
Allora $\exists\, a<\xi<b$ t.c. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.



TEOREMA DEGLI INCREMENTI FINITI (CAUCHY).
Siano $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue e derivabili in $]a,b[$.
Allora $\exists\, a<\xi<b$ t.c. $(f(b)-f(a))\, g'(\xi) = (g(b)-g(a))\, f'(\xi)$

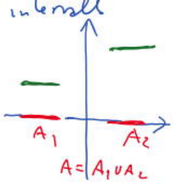
[significato: $(f,g) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$
dunque una CURVA PARAMETRICA nel piano
Ex: $f(t)=\cos(t)$, $g(t)=\sin t$; $[a,b]=[0,2\pi]$
disegna la circonf. centro $(0,0)$ raggio 1]



(ii) (DERIVATA E COSTANZA)

f è derivabile con $f' \equiv 0 \iff f$ è localmente costante,
ovvero costante su ogni intervallo contenuto in A.

[dunque, se A intervallo, $f' \equiv 0 \iff f$ costante su A]



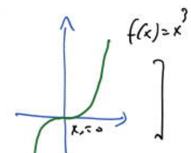
COROLLARIO:

Siano $f,g : A \to \mathbb{R}$ con A intervallo, derivabili.
Allora $f' \equiv g' \iff \exists\, K \in \mathbb{R}$ t.c. $f = g + K$.

(iii) (DERIVATA AL PUNTO E MONOTONIA LOCALE)

Sia f derivabile in x_0.
Se f è crescente all'int. di x_0, allora $f'(x_0) \geq 0$.

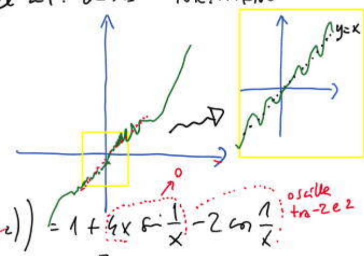
[VERSIONE FORTE?
f strett. cresc. all'int. di $x_0 \overset{?}{\Rightarrow} f'(x_0) > 0$ No!]



[VICEVERSA?
Se $f'(x_0) \geq 0$, è vero che f cresce all'int. di x_0? No!
Ad es.: $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$: $f'(0) = 0 \geq 0$, ma f decresce prima di 0.]

E se fosse $f'(x_0) > 0$, è vero che f cresce all'int. di x_0? NEPPURE!

Es. : $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$



$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(1+2x\sin\frac{1}{x}\right) = 1$$

Però $f'(x) = 1 + 2\cdot\left(2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)\right) = 1 + \underbrace{4x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - 2\cos\frac{1}{x}$ oscilla tra -2 e 2

cambia continuamente segno all'intorno di $x_0 = 0$] (varia tra i paraggi di -1 e quelli di 3)

(iv) (DERIVATA E MONOTONIA GLOBALE)

Se A intervallo aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile su A, si ha che

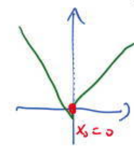
f è crescente su A $\iff$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in A$.

f è strett. cresc. su A $\iff$ $\cancel{f'(x) > 0 \quad \forall x \in A}$ No! Pensare a $f(x) = x^3$

$\iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in A \text{ e} \\ (f')^{-1}(0) \text{ è discreto} \end{cases}$ ($f'(x) = 0$ solo in punti isolati)

[Grandissima utilità pratica di $f'(x) \geq 0 \implies f$ crescente su A
ma attenzione ai punti singolari, in cui f non è derivabile!]

Es. $f(x) = |x|$: $x_0 = 0$ è pt di min. assoluto,
ma per i criteri suddetti è INVISIBILE
perché $f'(0)$ non esiste.]



Dim (i) Supponiamo che x_0 sia un punto di max locale per $f : A \to \mathbb{R}$.
Allora all'intorno sx di x_0 il rapp. increm. $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (numeratore ≤ 0, denominatore < 0)
dunque, se esiste (finito) $\lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$, tale limite deve essere ≥ 0 (per il T. confronto). Idem per la derivata dx (≤ 0).

Vediamo perché ne discende il T. Rolle.
Per Weierstrass, f assume max-min assoluti su $[a,b]$ (compatto).

Ci sono due possibilità.

(1) Tali max-min ass. siano assunti proprio negli estremi a e b

Ma allora $f \equiv$ costante! Dunque $f'(\xi)=0 \quad \forall \xi \in]a,b[$.

(2) Almeno uno tra max-min ass. è assunto in un punto interno $\xi \in]a,b[$.

Ma allora tale ξ è anche di max/min locale $\Rightarrow f'(\xi)=0$.

Mostriamo ora che Cauchy segue subito da Rolle (dunque anche Lagrange, che è Cauchy per $g(x)=x$).

Poniamo $h(x) := (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a))$

Notiamo che $h(a)=0=h(b)$ dunque siamo nelle ipotesi di Rolle:

$\exists\, \xi \in]a,b[$ t.c. $h'(\xi) = (f(b)-f(a))\,g'(\xi) - (g(b)-g(a))\cdot f'(\xi) = 0$

ma ciò è proprio Cauchy.

(ii) "$\Leftarrow$" Se f è loc. cost. (costante su ogni intervallo contenuto in A) allora $f' \equiv 0$: infatti $f' \equiv 0$ su ogni intervallo, e A è unione degli intervalli in esso contenuti.

"$\Rightarrow$" Prendiamo due qualsiasi punti $a, b \in A$ t.c. $[a,b] \subset A$.

Tesi: $f(a)=f(b)$.

Se consideriamo $f|_{[a,b]}$ siamo nelle ipotesi di Lagrange:

$$\exists\, \xi \in]a,b[\;:\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = 0 \Rightarrow f(b)=f(a).$$

La conseguenza è ovvia: $h = f-g$ ha sempre $h' \equiv 0$.

(iii) Se f è crescente all'int di x_0, ciò equivale al fatto che il rapp. incr. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ all'int. di x_0.

Dunque, passando al lim., anche $f'(x_0) \geq 0$ (confronto).

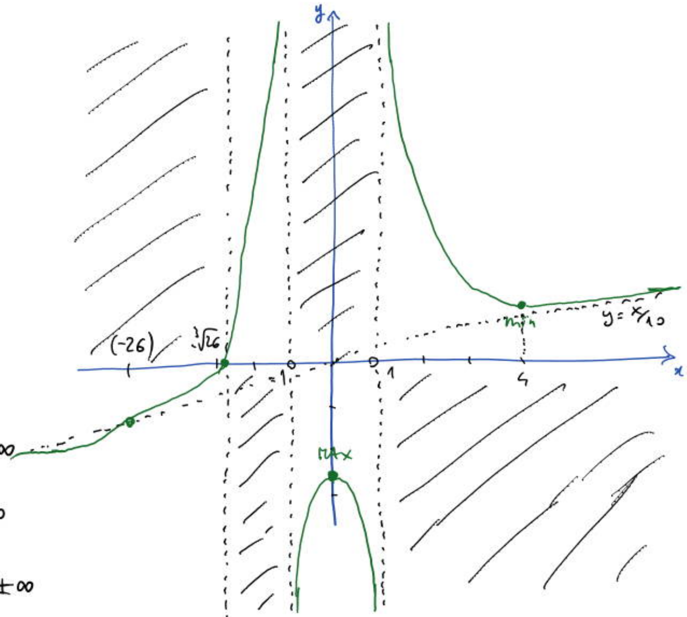
(iv) "$\Rightarrow$" è il punto (iii).

"$\Leftarrow$" Siano $a, b \in A$ con $a<b$. Tesi: $f(a) \leq f(b)$

Per Lagrange $\exists\, \xi \in]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq f(a)$.

Infine, una f crescente è anche strett. crescente $\Leftrightarrow$ non ha intervalli di costanza, ma ciò è proprio quello che si afferma nell'enunciato. □

Ex Studiare crescenza, estremi locali etc di $f(x)=\dfrac{x^3+26}{10(x^2-1)}$



Dominio: $x\neq\pm 1$

Zeri: $f(x)=0 \iff x=-\sqrt[3]{26}\sim -2{,}9$

Segno: $N(x)>0 \iff x>-\sqrt[3]{26}$

$D(x)>0 \iff |x|>1$

	$-\sqrt[3]{26}$		-1		1	
N	$-$	$+$		$+$		$+$
D	$+$	$+$		$-$		$+$
f	$-$	$+$		$-$		$+$

$f(0)=-\frac{13}{5}=-2{,}6$

f è derivabile (sul dominio!)

Limiti interessanti: $-\infty,\ -1^{\mp},\ 1^{\mp},\ +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^{\mp}} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^{\mp}} f(x)=\mp\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\dfrac{x^{\cancel{3}}(1+26x^{-3})}{10\cancel{x^2}(1-x^{-2})}=\pm\infty$

D'altra parte: $f(x)\sim_{+\infty}\frac{x}{10}$ dunque $f(x)=\frac{x}{10}+o_{+\infty}(x)$. Poi

$f(x)-\frac{x}{10}=\dfrac{x^3+26}{10(x^2-1)}-\dfrac{x}{10}=\dfrac{\cancel{x^3}+26-\cancel{x^3}+x}{10(x^2-1)}\sim_{+\infty}\dfrac{x}{10x^2}=\frac{1}{10}x^{-1}$ dunque $f(x)=\frac{x}{10}+\frac{1}{10}x^{-1}+o_{+\infty}(x^{-1})$

In part: $f(x)=\frac{x}{10}+\underbrace{o_{+\infty}(1)}_{\text{infinitesimo!}}$, ovvero $\frac{x}{10}$ è asintoto obliquo a $+\infty$ (e a $-\infty$).

Intersezioni? $f(x)=\frac{x}{10} \iff \dfrac{x^3+26}{\cancel{10}(x^2-1)}=\dfrac{x}{\cancel{10}} \iff x^3+26=x^3-x \iff x=-26$

$\frac{1}{1-q}=1+q+q^2+q^3+q^4+\dots$ se $|q|<1$

Metodo alternativo per lo sviluppo asintotico a ∞:

$f(x)=\dfrac{x^3+26}{10(x^2-1)}=\dfrac{x}{10}\left(\dfrac{1+26x^{-3}}{1-x^{-2}}\right)=\dfrac{1}{10}x(1+26x^{-3})\cdot\dfrac{1}{1-\underbrace{x^{-2}}_{q\to 0}}$

$=\frac{1}{10}x\,(1-26x^{-3})\left(1+x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+o_{+\infty}(x^{-7})\right)$

$=\frac{1}{10}\left(x-26x^{-2}\right)\left(1+x^{-2}+x^{-4}+x^{-6}+o_{+\infty}(x^{-7})\right)$

$=\frac{1}{10}\left(x+x^{-1}-26x^{-2}+x^{-3}-26x^{-4}+o_{+\infty}(x^{-4})\right)$

Crescenza: $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2-1)-(x^3+26)\cdot 2x}{10(x^2-1)^2}=\dfrac{x(x^3-3x-52)}{10(x^2-1)^2}$ $\quad x^3-3x-52=(x-4)(x^2+4x+13)$

Pti stat: $f'(x)=0 \iff x=0,\ x=4$

	1	0	-3	-52
4		4	16	52
	1	4	13	//

$f'(x)>0$: $N(x)>0 \iff (x<0)\vee(x>4)$

$D(x)>0$ sempre $\Rightarrow f'(x)>0$ per $x<0,\ x>4$

$f(4)=\dfrac{64+26}{10(16-1)}=\frac{3}{5}$

		-1		0		1		4	
f'	+		+		−		−		+
f	↗		↗		↘		↘		↗
				max				min	

Sviluppo in 0. $f(x) = \dfrac{x^3+26}{10(x^2-1)} = \dfrac{26+x^3}{10(-1+x^2)} = -\dfrac{1}{10}(26+x^3)\cdot\dfrac{1}{1-x^2}$

$$= -\frac{1}{10}(26+x^3)(1+x^2+x^4+o_0(x^5)) = -\frac{1}{10}(26+26x^2+x^3+o_0(x^3))$$

$$= -\frac{13}{5} - \frac{13}{5}x^2 - \frac{1}{10}x^3 + o_0(x^3)$$

Sviluppo in 1. $x = 1+t$ $\quad f(x) = f(1+t) = \dfrac{27+3t-3t^2+t^3}{10\,t(2+t)}$

$$= \frac{1}{10}t^{-1}(27+3t-3t^2+t^3)\cdot\frac{1}{2+t} = \frac{1}{10}t^{-1}(27+3t-3t^2+t^3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-t/2)}\ q$$

$$= \frac{1}{20}t^{-1}(27+3t-3t^2+t^3)\cdot\left(1-t/2+t^2/4-t^3/8+o_0(t^3)\right)$$

$$= \frac{1}{20}(27t^{-1}+3-3t+t^2)\left(1-t/2+t^2/4-t^3/8+o_0(t^3)\right)$$

$$= \frac{1}{20}\left(27t^{-1}+(3-27/2)+(27/4-3/2-3)t+o_0(t)\right)$$

$$= \frac{27}{20}(x-1)^{-1} - \frac{21}{40} + \frac{9}{80}(x-1) + o_1(x-1)$$

$\boxed{\text{Ex.}}$ Studiare crescenza ed estremi locali delle sgg. funzioni, procedendo per quanto possibile nello studio di funzione (dominio, simmetrie, zeri, segno, limiti interessanti, qualche sviluppo asintotico...) usando anche eventualmente il "metodo grafico":

(0) $f(x) = 3\sqrt{|x+1|} - 1 + 2|x|$

(1) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ $\qquad$ (2) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 1$

(3) $f(x) = x^3 e^x$ $\qquad$ (4) $f(x) = \log x - 2\sqrt{|x|}$

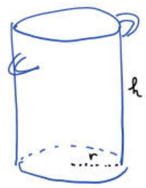
(5) $f(x) = |x^2-2x| + |x-1|$ $\qquad$ (6) $f(x) = x - \tan x$

(7) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin x - \cos x}$ $\qquad$ (8) $f(x) = \log(x+e^{-x})$

(9) $f(x) = 3\log^2|x+1| - x$ $\qquad$ (10) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2\log(x^2+4) + 2\arctan\frac{x}{2}$

PROBLEMI DI MAX-MIN : problemi in cui una quantità $f(x)$ va resa max-min al variare di un'altra (x)

$\boxed{\text{Ex.}}$ Tra le pentole di data sup. esterna S, qual è la più capiente?



So che $r^2\pi + 2\pi r \cdot h = S \implies h = \dfrac{S - r^2\pi}{2\pi r} \qquad \left(0 < r < \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)$

$V(r) = r^2\pi \cdot h = r^{\cancel{2}}\cancel{\pi} \cdot \dfrac{S - r^2\pi}{2\cancel{\pi}\cancel{r}} = \dfrac{1}{2} r (S - r^2\pi)$

$V'(r) = \dfrac{1}{2}(S - 3\pi r^2) \qquad V'(r) = 0 \iff r = \sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}, \quad V'(r) > 0 \iff r < \sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$

	0 — $\sqrt{S/3\pi}$	$\sqrt{S/3\pi}$ — $\sqrt{S/\pi}$
V'	+	−
V	↗	↘

MAX in $\sqrt{S/3\pi}$

$V_{max} = V\left(\sqrt{S/3\pi}\right).$

REGOLA DI DE L'HÔPITAL

Prop. Sia A intervallo, e sia $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ di accum. per A.

Siano $f, g : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabili con $g'(x) \neq 0$ ovunque.

Si assuma che esista $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora, se (1) f, g sono entrambe infinitesime in x_0 $\left(\lim = \frac{0}{0}\right)$

oppure se (2) g è infinita in x_0

esiste anche $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è uguale a $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Alcune osservazioni.

- La regola è di grande utilità, perché permette di risolvere vari limiti in f.i. anche senza ricorrere agli sviluppi asintotici:

Ex. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{+\sin x}{6x} \overset{\exists}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} \ \exists = \frac{1}{6}$

- Va però posta attenzione alla sua applicabilità.

  $\to \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\sin x}{\cos 2x - 4x}$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\cos x}{-2\sin 2x - 4}$ NON esiste!

  D'altra parte sappiamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\sin x}{\cos 2x - 4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{-4x} = -3/4$.

- De l'Hôpital a volte può complicare la situazione anziché semplificarla.

  $\to \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} e^{-1/x} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x^2\, e^{-1/x}}{1}$ che è peggio di prima!

  D'altra parte, posto $t = 1/x$: $\lim_{t\to+\infty} t e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} t/e^t = 0^+$.

- Occhio alle ipotesi (1) e (2)!

  $- \lim_{x\to 1^\pm} \frac{e^x+x-1}{\log x}$: è f. det. $\frac{e}{0^\pm} = \pm\infty$. Ma applicando (impropriamente!) de l'Hôp. si ottiene $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{e^x+1}{1/x} = e+1$ che non c'entra per nulla!

  $- \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \neq 0$, mentre $= 1$ se $\alpha = 0$.

  D'altra parte, con de l'Hôp.: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad \forall \alpha$?!?