ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 12/11/2014

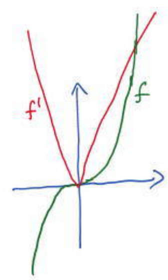
LA DERIVAZIONE MIGLIORA O PEGGIORA LA REGOLARITÀ?

Ovvero: la derivata di una funzione derivabile sarà ancora derivabile?

La derivazione tende a "far peggiorare" la qualità:
nel senso che, data una funzione derivabile, la sua derivata potrebbe essere solo continua (e non più derivabile), o addirittura discontinua.

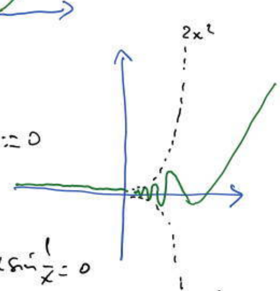
$\boxed{\text{Ex.}}$ • $f(x) = x^2 \operatorname{sign}(x)$

$f'(x) = 2x \operatorname{sign}(x)$



(f è derivabile in $\mathbb{R}$ mentre f' NON lo è in $x=0$)

• $g(x) = (1+\operatorname{sign}(x))\, x^2 \sin\frac{1}{x}$, $g(0) := 0$



g è derivabile in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} (1+\operatorname{sign} x)\, x \sin\frac{1}{x} = 0$$

e vale $g'(0) = 0$

(negli altri punti ovviamente non c'è problema).

Ma chi è la fz. derivata?
$$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0 \\ 2\left(2x\sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Ora
$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\Big(\underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos\frac{1}{x}}_{\text{oscilla fra } -1 \text{ e } 1}\Big)$$
non esiste! (g' è discontinua in $x=0$)

Dunque $g'(0)$ esiste e vale 0, ma $g'(x)$ è discontinua in $x=0$.

Tuttavia, se il limite di $g'(x)$ esistesse finito allora g sarebbe derivabile:

Prop. Sia A intervallo, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$ continua in A e derivabile in $A \setminus \{x_0\}$

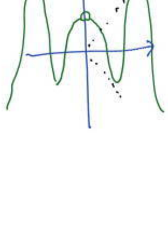
- se $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ esiste finito $\Rightarrow$ f è derivabile anche in x_0 con $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$ (e f' è continua in x_0).
- se invece $\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x)$ esistono finiti ma diversi oppure esistono entrambi ma uno dei due vale $\pm\infty$ $\Big\} \Rightarrow f$ NON È derivabile in x_0.

Dim. Per vedere se f è derivabile in x_0 devo valutare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
Per ipotesi tale limite è in f.i. $0/0$: posso provare ad applicare de l'Hôpital. Ma nelle ipotesi date il $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ esiste sia a dx che a sx, dunque de l'Hôpital si può APPLICARE, e pertanto le conclusioni appaiono chiare. $\square$

Se A è un intervallo aperto e $x_0 \in A$, una funzione $f: A \to \mathbb{R}$ si dirà DI CLASSE $\mathcal{C}^1$ IN x_0 se f è derivabile e la derivata f' è continua in x_0; e si dirà DI CLASSE $\mathcal{C}^1$ (o, più brevemente, $\mathcal{C}^1$: sottointeso, su tutto A) se è $\mathcal{C}^1$ in ogni $x \in A$.

Da quanto visto, una funzione $\mathcal{C}^1$ è anche derivabile, ma non viceversa.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, definita in $x=0$ con $f(0)=1$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua.
È anche $\mathcal{C}^1$? Nei punti $\neq 0$ ovviamente sì: $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ è di certo continua in tutti i punti $\neq 0$. Lo è anche in $x=0$?



$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x(\cancel{1} - x^2/2 + o(x^3)) - (\cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))}{x^2}$$

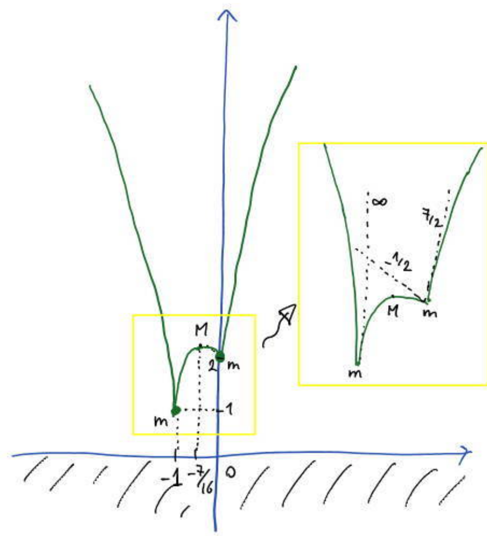
$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3}x\right) = 0$. Dunque ok! $f'(x)$ è continua in 0

ne segue che f è derivabile anche in $x=0$, con $f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$

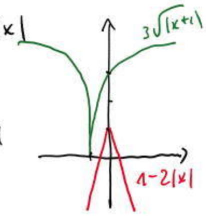
$\boxed{\text{Ex.}}$ Data $f(x) = 3\sqrt{|x+1|} - 1 + 2|x|$, studiarne dominio, zeri, simmetrie, limiti, crescenza e sviluppi asintotici in $0, -1, \pm\infty$.

Discutere infine $\lim_{x\to 0,+\infty} \frac{f(x) - 3 + e^{\alpha x}}{x \log|3x-1|}$ al variare di α.

Dominio: $\mathbb{R}$. Regolarità: continua ovunque, e derivabile ovunque tranne (forse) in $x=-1, 0$ (dove potrebbero esserci risp. una cuspide e un pto angoloso), in cui $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$.



Zeri: $f(x) = 0 \iff 3\sqrt{|x+1|} = 1 - 2|x|$
Mai!



Segno: $f(x) > 0 \iff 3\sqrt{|x+1|} > 1 - 2|x|$
sempre!

Sviluppi asintotici.

$$\infty: \quad f(x) = 2|x| + 3\sqrt{|x+1|} - 1 = 2|x| + 3\sqrt{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1$$

$$= 2|x| + 3\sqrt{|x|}\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \theta_\infty(x^{-2})\right) - 1$$

$$(+\infty) \quad 2x + 3\sqrt{x} - 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} + \theta_{+\infty}(x\sqrt{x})$$

(notare che $x = -|x|$)

$$(-\infty) \quad -2x + 3\sqrt{|x|} - 1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{|x|}} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x\sqrt{|x|}} + \theta_{-\infty}(x\sqrt{|x|})$$

0 : $f(x) = -1 + 3\sqrt{1+x} + 2|x| = -1 + 3\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + 2|x|$

(0^+) $\quad 2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ $\qquad$ pendenza in 0^+ : $7/2$ $\qquad$ (pt angoloso)

retta tg a dx/sx

(0^-) $\quad 2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ $\qquad$ pendenza in 0^- : $-1/2$

-1 : $\quad x = -1+t \qquad f(x) = 3\sqrt{|x+1|} - 1 - 2x = f(-1+t) = 3\sqrt{|t|} - 1 - 2(-1+t)$

$= 3\sqrt{|t|} - 2t + 1 = 1 + 3\sqrt{|x+1|} - 2(x+1)$

Derivata (per $x \neq 0, -1$): $\quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x+1|}} \cdot \operatorname{sign}(x+1) \cdot 1 + 2 \operatorname{sign} x$

Perciò: per $x < -1$ è $f'(x) < 0$: f strett. decr.

per $x > 0$ è $f'(x) > 0$: f strett. cresc.

per $-1 < x < 0$: $\quad f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+1}} - 2 \geq 0 \iff \frac{3}{2\sqrt{x+1}} \geq 2 \iff$

$\frac{9}{4(x+1)} \geq 4 \iff x \leq -7/16$

$f(-7/16) = 17/8 \sim 2{,}1$.

	-1		$-7/16$		0	
f'	−		+	−		+
f	↘		↗	↘		↗
	min sing.		max		min sing	

Notiamo che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 7/2 \neq \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1/2$,

e che $\lim_{x\to -1^{\mp}} f'(x) = \mp\infty$: dunque, per la Proposizione precedente,

f è sì continua e non derivabile in $x = -1, 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3 + e^{\alpha x}}{x \log|3x-1|} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3 + e^{\alpha x}}{x \log(1-3x)} \quad (\text{è in f.i. } 0/0 \ \forall \alpha)$$

$$\underset{\log(1-3x) \sim_0 -3x}{=} \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3 + e^{\alpha x}}{-3x^2} = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\cancel{2} + \frac{7}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right) - \cancel{3} + \left(\cancel{1} + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)}{-3x^2} \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\cancel{2} - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right) - \cancel{3} + \left(\cancel{1} + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2)\right)}{-3x^2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha + \frac{7}{2})x + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{3}{8}\right)x^2 + o(x^2)}{-3x^2} = \begin{cases} (\text{se } \alpha > -7/2) & \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha + 7/2)x}{-3x^2} = -\infty \\ (\text{se } \alpha = -7/2) & \lim_{x\to 0^+} \frac{23/4\, x^2}{-3x^2} = -23/12 \\ (\text{se } \alpha < -7/2) & \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha + 7/2)x}{-3x^2} = +\infty \end{cases} \\ \\ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \\ \lim_{x\to 0^-} \dfrac{(\alpha-\frac12)x + \left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac38\right)x^2 + o(x^2)}{-3x^2} = \begin{cases} (\text{se } \alpha>\frac12) & \lim_{x\to0^-} \dfrac{(\alpha-\frac12)x}{-3x^2} = +\infty \\ (\text{se } \alpha=\frac12) & \lim_{x\to0^-} \dfrac{-\frac14 x^2}{-3x^2} = \frac1{12} \\ (\text{se } \alpha<\frac12) & \lim_{x\to0^-} \dfrac{(\alpha-\frac12)x}{-3x^2} = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

$\log|3x-1| = \log(3x-1) \underset{+\infty}{\sim} \log 3x$
$= \log 3 + \log x \underset{+\infty}{\sim} \log x$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-3+e^{\alpha x}}{x\log|3x-1|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-3+e^{\alpha x}}{x\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2x+o_{+\infty}(x)\right)-3+e^{\alpha x}}{x\log x}$$

$$= \begin{cases} (\text{se } \alpha>0) & \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x\log x} = +\infty \quad \left(\text{infatti } \dfrac{e^{\alpha x}}{x\log x} > \dfrac{e^{\alpha x}}{x^2} \to +\infty\right) \\ (\text{se } \alpha\le 0) & \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x\log x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\log x} = 0\,. \end{cases}$$